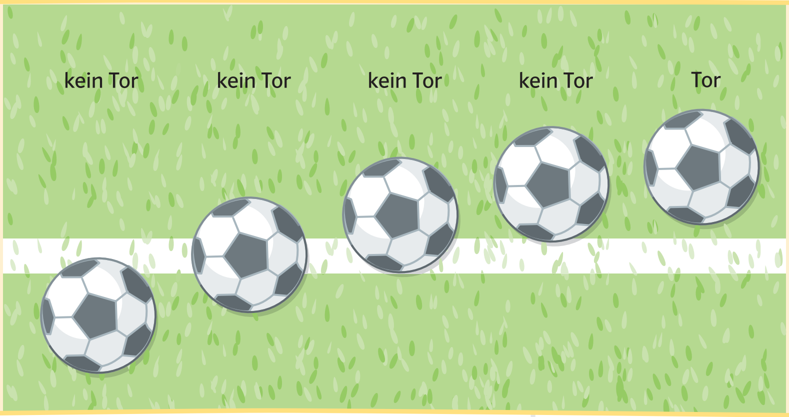
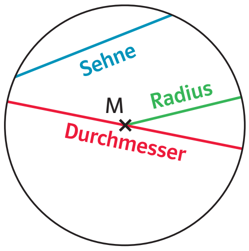
1 Kreis und Gerade



„Ein Tor wird erzielt, wenn …“

Wie sollte die FIFA-Regel vollständig lauten?

Um einen Kreis zu zeichnen, legt man einen Mittelpunkt M und einen Radius r fest. Alle Punkte mit dem gleichen Abstand r vom Mittelpunkt M bilden zusammen die Kreislinie.
Eine Strecke zwischen zwei Punkten auf der Kreislinie heißt Sehne s. Verläuft eine Sehne durch den Mittelpunkt, nennt man sie Durchmesser d.



Es gilt $d = 2 \cdot r$.

Definition eines Kreises
Die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt M dieser Ebene den gleichen Abstand r haben, heißt Kreis k mit dem Radius r.

Auf der Mittelsenkrechten einer Strecke liegen alle Punkte, die von Anfangs- und Endpunkt dieser Strecke den gleichen Abstand haben.

In Fig. 1 liegen die Punkte P und Q auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M. Somit ist M gleich weit von den Punkten P und Q entfernt. Demnach muss der Mittelpunkt M auf der Mittelsenkrechten der Sehne $\overline{PQ}$ liegen.

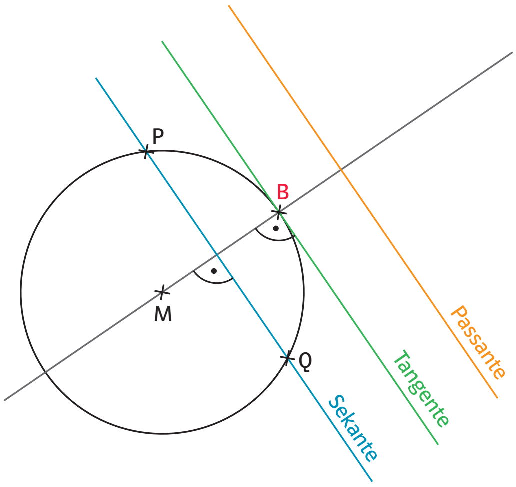


Fig. 1

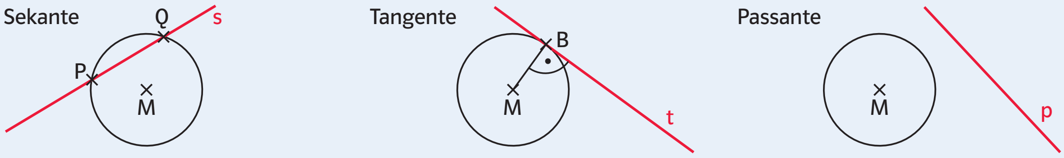
Verlängert man die Sehne $\overline{PQ}$ zu einer Gerade, wird aus der Sehne eine Sekante. Eine Sekante schneidet einen Kreis in zwei Punkten. Verschiebt man diese Gerade mittels Parallelverschiebung so weit, bis sie nur noch einen gemeinsamen Punkt B mit dem Kreis hat, wird sie zur Tangente. Der Punkt B heißt Berührungspunkt und die Strecke $\overline{MB}$ heißt Berührungsradius. Tangente und Berührungsradius stehen senkrecht aufeinander. Bei einer weiteren Parallelverschiebung in die gleiche Richtung wird die Gerade zur Passante. Eine Passante hat keinen Schnittpunkt mit dem Kreis.

secare (lat.): schneiden
tangere (lat.): berühren
passer (frz.): vorbeigehen

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen, 3; Malz, Anja, Taunusstein, 2; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, 1

Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 8
ISBN: 978-3-12-733287-2

Eine Gerade kann einen Kreis in genau zwei Punkten schneiden (**Sekante**), in einem Punkt berühren (**Tangente**) oder mit ihm keinen gemeinsamen Punkt haben (**Passante**).



Die Tangente steht im **Berührungspunkt** B senkrecht auf dem Berührungsradius $\overline{MB}$.

Beispiel 1 **Konstruktion einer Tangente**
Konstruiere an einen Kreis in einem Berührungspunkt B die Tangente.
Lösung
1. Lege den Berührungspunkt B fest.
2. Zeichne durch B und den Mittelpunkt M des Kreises eine Gerade.
3. Spiegele M an B (Fig. 1).
4. Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{MM'}$.

Die Mittelsenkrechte zu $\overline{MM'}$ ist die Tangente t an den Kreis im Punkt B (Fig. 2).

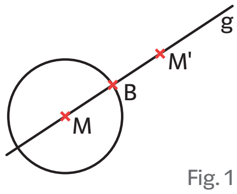


Fig. 1

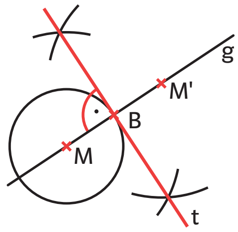
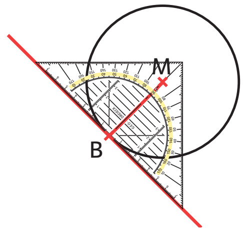


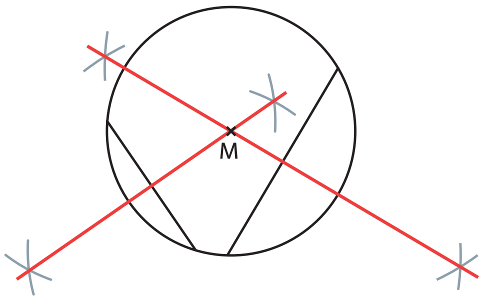
Fig. 2

Zeichnung einer Tangente im Berührungspunkt B mit dem Geodreieck:



Beispiel 2 **Konstruktion des Mittelpunktes**
Zeichne einen Kreis durch Umfahren eines Gegenstandes. Konstruiere den Mittelpunkt des Kreises.
Lösung
1. Zeichne zwei Sehnen des Kreises.
2. Konstruiere die Mittelsenkrechte jeder Sehne. Schnittpunkt ist der Mittelpunkt.
3. Zeichne den Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten ein.

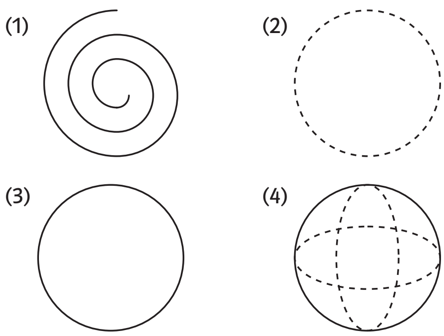
Dieser Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises.



Aufgaben

○ **1** Zeichne einen Kreis mit dem Radius 5 cm. Wähle auf dem Kreis drei Punkte T, P und Q. Konstruiere die Tangenten in diesen Berührungspunkten.

○ **2** Gib an, welche der nebenstehenden Figuren Kreise sind und welche nicht. Begründe deine Entscheidung.



○ **3** Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 3,2 cm. Zeichne
a) eine Passante p und konstruiere alle zu p parallelen Tangenten des Kreises,
b) eine Sekante s und konstruiere alle zu s parallelen Tangenten des Kreises.

Abbildungen: Malz, Anja, Taunusstein, 6; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, 1, 5; Visual Design, Sybille Gückel, Stuttgart, 2-4

Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 8
ISBN: 978-3-12-733287-2

Teste dich!

Lösungen, Seite 203

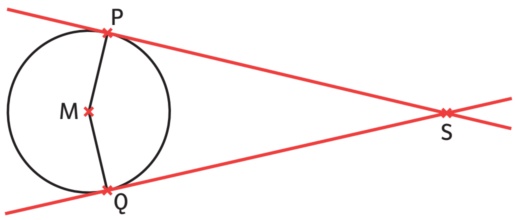
4 Zeichne an einen Kreis mit dem Radius 3,5 cm eine Tangente in einem Berührungspunkt B. Zeichne dann eine Passante mit einem Abstand von 3 cm und eine Sekante mit einem Abstand von 1 cm zur Tangente.

5 Überprüfe folgende Aussagen und begründe deine Antwort mithilfe der Wortliste.
a) „Eine Tangente und eine Sekante eines Kreises verlaufen stets parallel."
b) „Eine Passante schneidet jede Tangente eines Kreises genau einmal."
c) „Jede Sekante durch die Kreispunkte P und T bildet mit den Tangenten in den Punkten P und T ein gleichschenkliges Dreieck."

Wortliste
- Die Aussage stimmt, da …
- Die Aussage ist falsch, da …
- verläuft parallel zu
- steht senkrecht zu
- hat den Abstand zu
- schneidet alle

6 Beschreibe, wie man den Kreis rekonstruieren könnte.

7 Gegeben sind ein Kreis und zwei Punkte auf dem Kreis. Konstruiere zwei Tangenten an den Kreis, die mit dem Kreismittelpunkt und dem Schnittpunkt S der Tangenten ein Drachenviereck bilden. Gib an, welche Fälle eintreten können, wenn P unverändert bleibt, und Q auf dem Kreis wandert.



8 Zeichne einen Kreis und konstruiere drei Tangenten so, dass deren Schnittpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.

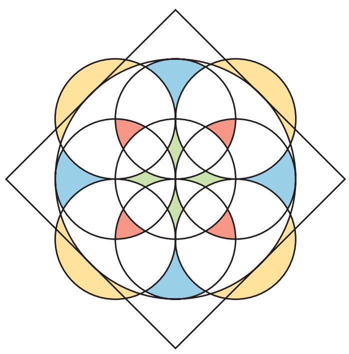
9 Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius $r = 3\,cm$ und einem Punkt P auf der Kreislinie.
a) Zeichne in diesen Kreis sechs Sehnen ein, die alle den Punkt P gemeinsam haben und jeweils 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm und 6 cm lang sind.
b) Begründe, warum keine Sehne in diesem Kreis länger als 6 cm sein kann.

Teste dich!

Lösungen, Seite 203

10 Zeichne einen Kreis. Konstruiere zwei Tangenten an diesen Kreis, die
a) orthogonal (senkrecht) zueinander sind, b) einen Winkel von 50° bilden.

11 Konstruiere das rechts dargestellte Rundfenster. Benutze für den großen Kreis einen Radius von $r = 4\,cm$.



12 In einer Parkanlage soll ein kreisförmiges Blumenbeet mit verschiedenfarbig blühenden Blumen angelegt werden. Entwirf Gestaltungsmöglichkeiten.

Teste dein Grundwissen! Zuordnungen

Grundwissen, Seite 179
Lösungen, Seite 203

G **13** Ein Maler benötigt zum Anstreichen eines Hauses 12 Stunden. Ermittle, wie lang drei Maler für die gleiche Arbeit brauchen.

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen 1, 3; Visual Design, Sybille Gückel, Stuttgart, 2
Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 8
ISBN: 978-3-12-733287-2

4

a) (1) $2x + 5 - 3x - 12 = -1x - 7$

(2) $-3{,}4x - 2{,}45 + x - (0{,}6x + 0{,}45) = -3x - 2{,}9$

b) (1) $3x + 5 = 17 \quad | -5$

$3x = 12 \quad | :3$

$x = 4$

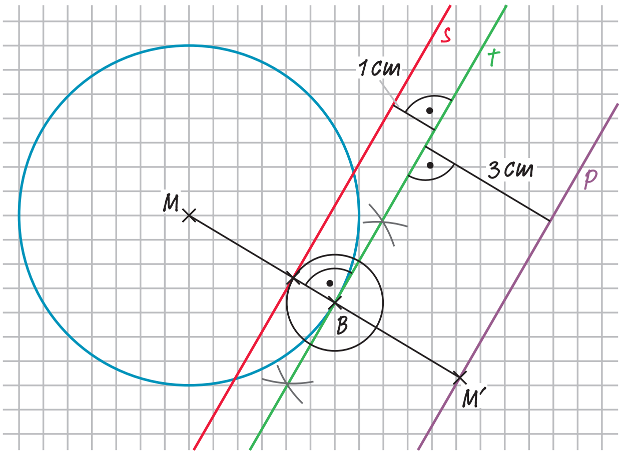
(2) $4{,}5x - 12 = 4 + 0{,}5x \quad | -0{,}5x + 12$

$4x = 16 \quad | :4$

$x = 4$

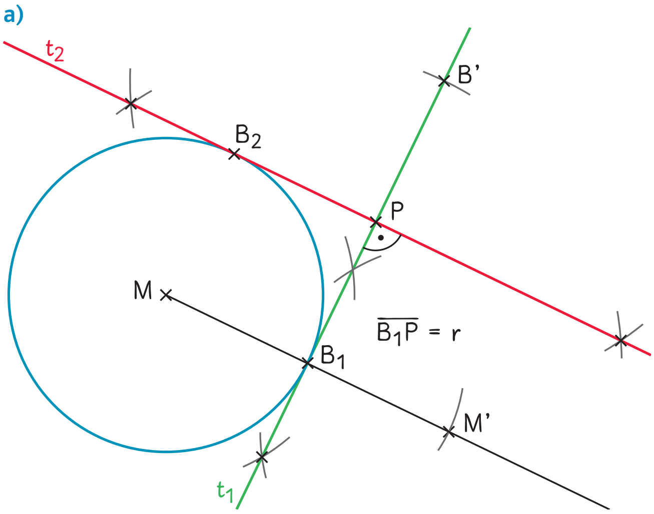
Seite 82

4

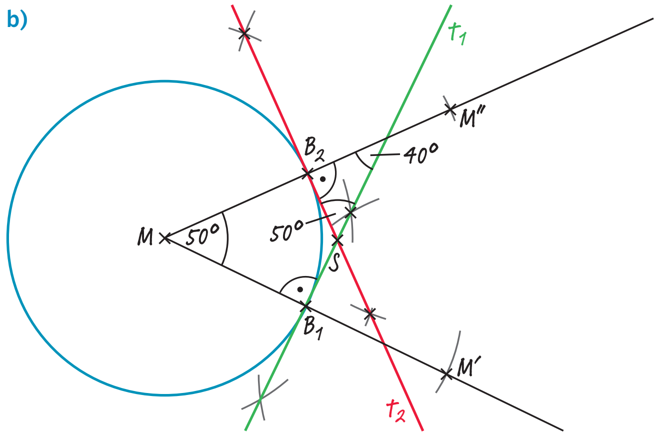


10

a)



b)



Man trägt in M einen Winkel mit der Winkelgröße 50° ab. Die Tangenten werden dann über die Mittelsenkrechten bei B_1 und B_2 konstruiert.

G **13**

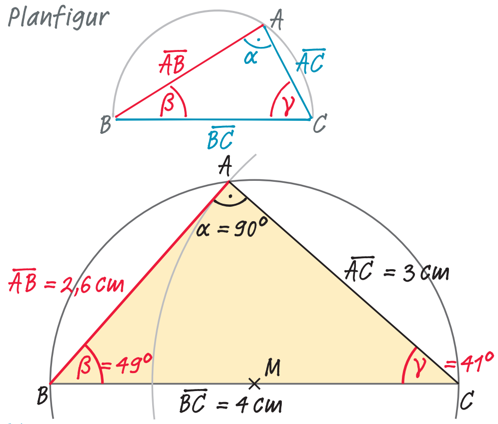
Es handelt sich hierbei um eine umgekehrt proportionale Zuordnung. Für die gleiche Arbeit brauchen drei Arbeiter 4 Stunden (vorausgesetzt sie arbeiten gleich schnell).

Seite 86

7

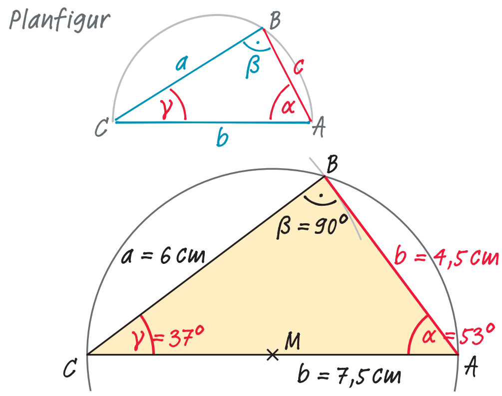
a)

Planfigur



b)

Planfigur



Abbildungen: imprint, Zusmarshausen, 1, 2,4; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, 3, 5-7

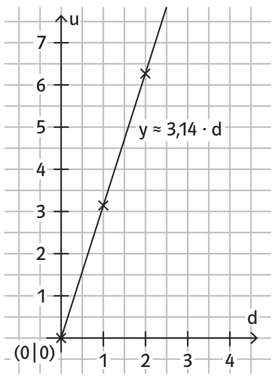
Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 8
ISBN: 978-3-12-733287-2

Winkelsumme im Dreieck $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, daraus ergibt sich $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = 180°$ oder $\gamma + \gamma = 180°$. Das bedeutet aber: $\gamma = 90°$. Ganz gleich, wie groß der Winkel α ist, an der Ecke C des großen Dreiecks liegt immer ein rechter Winkel.

Seite 79

Auf der Suche nach Kreisformeln
Messergebnisse zusammenstellen: individuelle Lösung

Messergebnisse auswerten:
- Die Messergebnisse belegen vermutlich, dass eine proportionale Zuordnung vom Typ $u = m \cdot d$ mit $m \approx 3{,}14$ sinnvoll ist.
- Die Messergebnisse liegen in der Nähe einer Geraden mit $y \approx 3{,}14 \cdot d$, wobei d den Durchmesser des Gegenstandes darstellt.
- $\pi \approx 3{,}14159265$ (Näherungswert TR)
  Der Anstieg der Geraden entspricht ungefähr der Zahl π.
  Ein Tabellenkalkulationsprogramm liefert für die entsprechende Regressionsgerade ein ähnliches Ergebnis.



Ergebnisse anwenden:
- $d = 1\,m \Rightarrow u \approx 3{,}14\,m$
  $d = 100\,m \Rightarrow u \approx 314\,m$
- Hier ist der Umfang (Länge des Papierstreifens) bekannt und der Durchmesser soll bestimmt werden:
  $u \approx 3{,}14 \cdot d \quad | : 3{,}14$
  $d \approx u : 3{,}14$
  zum Beispiel: $u = 29{,}7\,cm \Rightarrow d \approx 9{,}5\,cm$
  $u = 21{,}0\,cm \Rightarrow d \approx 6{,}7\,cm$

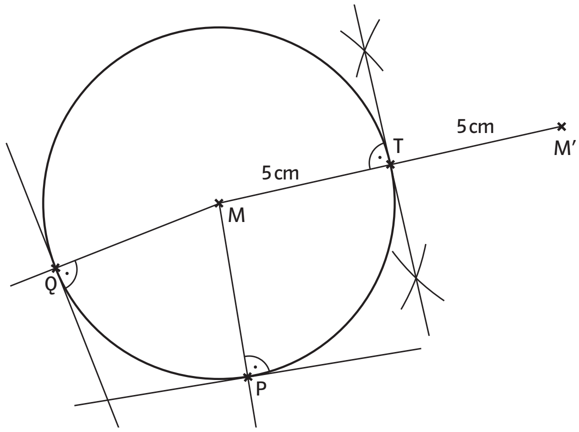
1 Kreis und Gerade

Seite 80

Einstiegsaufgabe
Vollständig muss die FIFA-Regel lauten: „Ein Tor wird erzielt, wenn der Ball die Torlinie zwischen den Torpfosten und unterhalb der Querlatte vollständig überquert (…).“ Wenn man den Ball direkt von oben anschaut, sieht man einen Kreis. Dieser Kreis kann die Torlinie schneiden, an einem Punkt berühren oder keine gemeinsamen Punkte mit ihr haben. Nur im letzen Fall zählt das Tor.

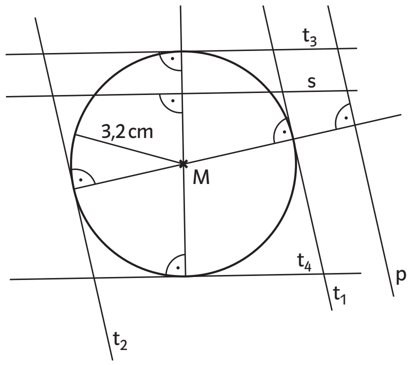
Seite 81

1



2
Nur bei der Figur (3) handelt es sich um einen Kreis. Es sind alle Bedingungen der Definition des Kreises erfüllt. Bei den anderen Figuren ist dies nicht der Fall.

3



a) $t_1 \parallel p$ und $t_2 \parallel p$ b) $t_3 \parallel s$ und $t_4 \parallel s$

Seite 82

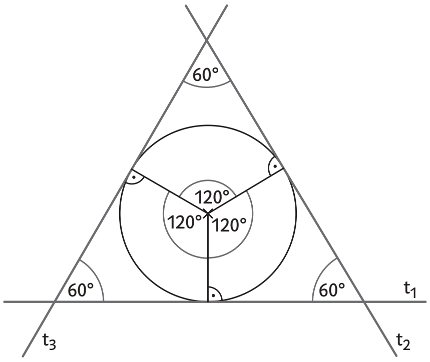
5
a) Die Aussage ist falsch, da höchstens zwei Tangenten parallel zu einer Sekante verlaufen, alle anderen hingegen nicht.
b) Die Aussage ist falsch. Eine Passante schneidet alle Tangenten eines Kreises, außer, wenn sie parallel zu einer Tangente verläuft. Diese beiden Tangenten schneiden sie nicht.
c) Die Aussage stimmt, wenn die Sekante nicht der Durchmesser ist. Es sei M der Kreismittelpunkt und S der Schnittpunkt der beiden Tangenten. Die beiden Dreiecke MSP und MTS sind kongruent denn $\overline{MS}$ haben die Dreiecke gemeinsam,
$\sphericalangle STM = \sphericalangle MPS = 90°$, $\overline{MP} = \overline{MT} = r$.
Also ist $\overline{SP} = \overline{ST}$.

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen
Text: gemeinfrei public domain damaine public
Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 8 Lösungen
ISBN: 978-3-12-733288-9

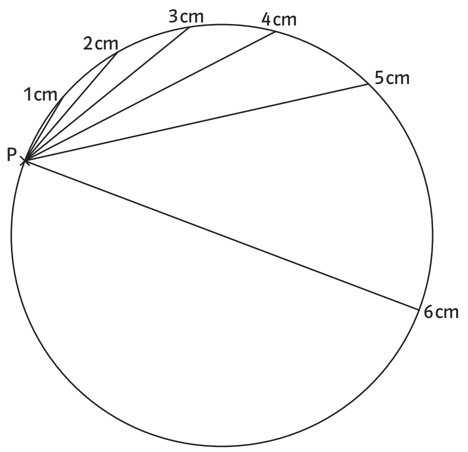
6
Um den Kreis zu rekonstruieren, werden zuerst zwei Sehnen des Kreisbogens eingezeichnet. Für jede Sehne wird die Mittelsenkrechte konstruiert. Der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Kreises. Nun kann der Abstand des Kreismittelpunktes zum Kreisausschnitt bestimmt und der Kreis rekonstruiert werden.

7
1. Fall: ∢ QMP < 180°.
Die Punkte QSPM bilden ein Drachenviereck.
2. Fall: ∢ QMP = 180°.
Es entsteht kein Drachenviereck mehr, da die beiden Tangenten parallel zueinander verlaufen.
3. Fall: ∢ QMP > 180°.
Die Tangenten schneiden sich im Punkt S_1 und die Punkte Q, M, P und S_1 bilden ein Drachenviereck.

8
Zeichne in den Kreis drei Radien, sodass der Winkel zwischen ihnen gleich groß, also gleich 120° ist. Die zugehörigen Tangenten bilden dann ein Dreieck, das drei gleich große Winkel hat und daher gleichseitig ist.

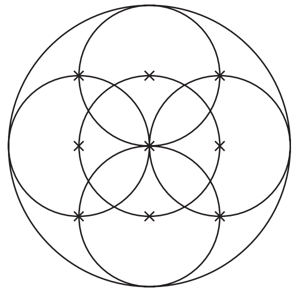


9
a)



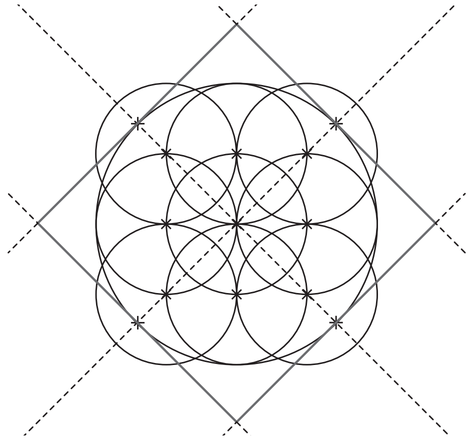
b) Die weiteste Entfernung, die zwei Kreispunkte voneinander haben können, ist der Durchmesser des Kreises. Da der Radius 3 cm lang ist, beträgt der Durchmesser 6 cm. Daher können die Endpunkte der Sehne nicht weiter als 6 cm auseinander liegen.

11
Anleitung: Zeichne einen Kreis mit Radius 4 cm und darin zwei Diagonalen, die senkrecht aufeinander stehen. Ermittle die Mittelpunkte der so entstandenen vier Radien und zeichne um diese sowie um den Mittelpunkt des großen Kreises jeweils einen Kreis mit Radius 2 cm.



Maßstab 1 : 2

Zeichne nun um jeden der Schnittpunkte der äußeren Kreise jeweils einen Kreis mit Radius 2 cm.
Zeichne die Diagonalen durch diese Schnittpunkte und bestimme die Schnittpunkte der Diagonalen und des großen Kreises. Dies sind die Berührungspunkte der zu konstruierenden Tangenten, um schließlich das Quadrat zu erhalten.



12
individuelle Lösung

2 Der Satz des Thales

Seite 83

Einstiegsaufgabe
Legt man eine rechteckige Postkarte zwischen zwei Stecknadeln, so bilden die beiden Stecknadeln gemeinsam mit der Ecke der Postkarte ein rechtwinkliges Dreieck. Zeichnet man mit einer gleichmäßigen Drehbewegung der Postkarte an der Ecke der Postkarte eine Linie, so entsteht eine Kreislinie, genauer gesagt, ein Halbkreis über der Strecke zwischen den beiden Stecknadeln. Dies lässt sich mit dem in der Lerneinheit vorgestellten Beweis des Satzes von Thales begründen.

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen
Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen
Mathematik 8 Lösungen
ISBN: 978-3-12-733288-9