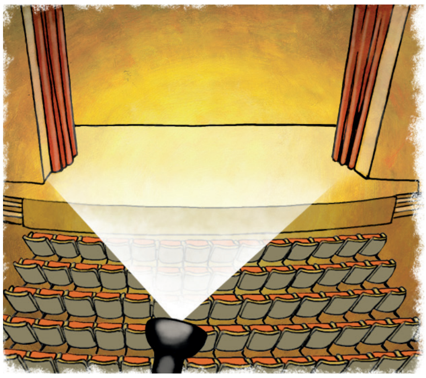
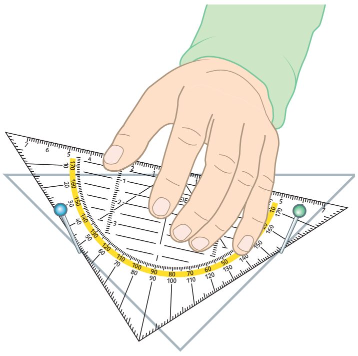
5 Der Satz des Thales

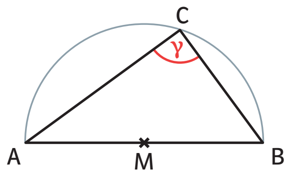


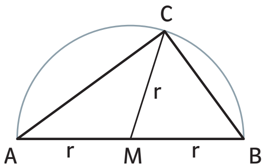


Die ganze Schule studiert für das Schuljubiläum ein Musical ein. Vor der Bühne steht ein Spot, der das Licht unter einem rechten Winkel abstrahlt.
Die Schülerinnen und Schüler suchen einen Platz, an dem der Spot den Blick auf die Bühne nicht stört.
→ Stellt die Situation mit dem Geodreieck nach und sucht für den Spot mehrere Plätze. Auf welcher Linie liegen alle Plätze für den Spot?

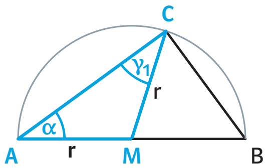
Tipp!
Beweisen heißt, eine Aussage so exakt zu begründen, dass kein Zweifel mehr möglich ist.
Das Ausmessen an einzelnen Figuren ist kein Beweis.

Der Eckpunkt C des Dreiecks ABC liegt auf dem Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{AB}$.
Der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ ist auch der Mittelpunkt des Halbkreises. Der Winkel γ ist nach Augenmaß ein rechter Winkel. Das lässt sich in vier Schritten **beweisen**.

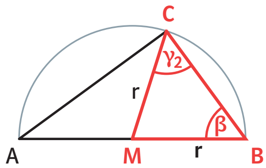




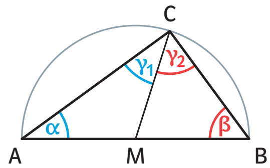
Der Eckpunkt C wird mit dem Punkt M verbunden. Dadurch entstehen die zwei Teildreiecke AMC und MBC.



Das Dreieck AMC ist gleichschenklig. Die Basis ist $\overline{AC}$. Die Basiswinkel sind α und γ_1.
Es gilt $\alpha = \gamma_1$.



Das Dreieck MBC ist gleichschenklig. Die Basis ist $\overline{BC}$.
Die Basiswinkel sind β und γ_2.
Es gilt $\beta = \gamma_2$.

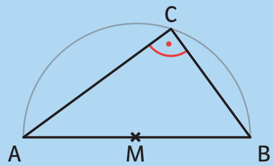


Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.
Es gilt
$\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°$.

In der Summe $\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2$ sind die Summanden $(\alpha + \beta)$ und $(\gamma_1 + \gamma_2)$ gleich groß. Jeder der beiden Summanden ist also halb so groß wie der Summenwert 180°.
Damit gilt $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 90°$.

Merke

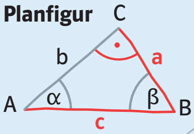
Satz des Thales
Wenn der Eckpunkt C des Dreiecks ABC auf dem Halbkreisbogen über der Seite $\overline{AB}$ liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel. Dieser Halbkreis heißt **Thaleskreis**.

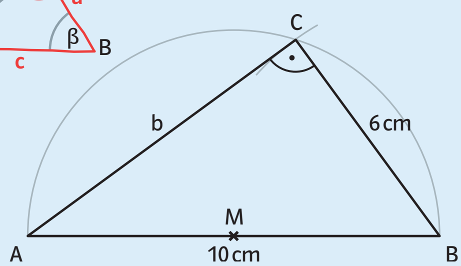


Beispiel

Das Dreieck ABC mit $c = 10\,cm$, $a = 6\,cm$ und dem rechten Winkel γ wird konstruiert:
1. die Seite $c = \overline{AB}$;
2. der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$;
3. der Halbkreisbogen um M mit $r = 5\,cm$;
4. der Kreisbogen um B mit $r = 6\,cm$;
5. der Schnittpunkt C der zwei Kreisbögen;
6. die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

Planfigur



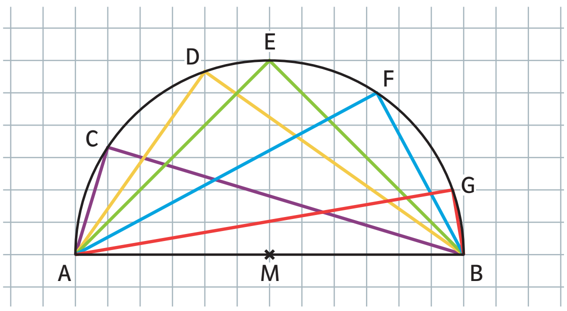


Abbildungen: Holtermann, Helmut, Danneberg, 2-6; Wiemers, Sabine, Düsseldorf, 1

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland
ISBN: 978-3-12-744271-7

Tipp!
Vergiss die Planfigur nicht.

○ **1** Zeichne die rechts abgebildete Figur in dein Heft.
Miss die Winkel in den Eckpunkten C, D, E, F und G. Was stellst du fest?



○ **2** Konstruiere das Dreieck ABC mithilfe des Thaleskreises.
a) $c = 8\,cm$; $a = 4\,cm$; $\gamma = 90°$
b) $c = 6\,cm$; $b = 5\,cm$; $\gamma = 90°$

Alles klar?

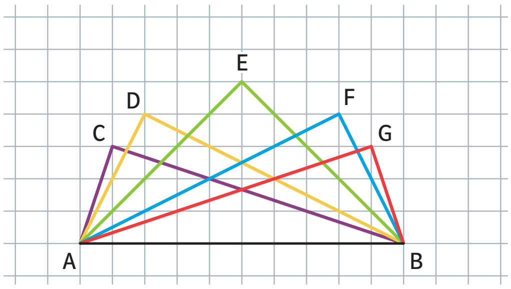
A Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 10\,cm$; $a = 5\,cm$ und $\gamma = 90°$.

Fördern
cz543g

○ **3** Konstruiere das Dreieck ABC mit
a) $c = 8\,cm$; $a = 3\,cm$; $\gamma = 90°$.
b) $c = 10\,cm$; $b = 6\,cm$; $\gamma = 90°$.

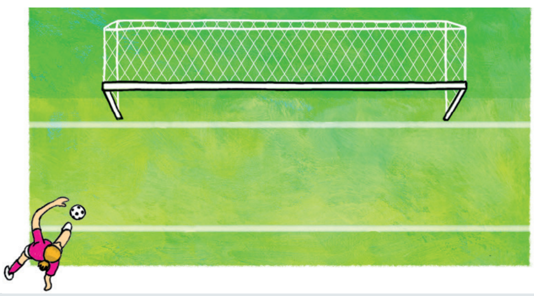
○ **4** Konstruiere das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC mit $c = 8\,cm$ und $\gamma = 90°$.

◒ **5** Ben behauptet: „Ich habe fünf rechtwinklige Dreiecke gezeichnet.“ **Überprüft** im Heft ohne die Winkel zu messen, ob Ben recht hat.



Tipp!
zu Aufgabe **6**
Der Maßstab 1:100 bedeutet: 1cm auf dem Bild entspricht 1m in der Wirklichkeit.

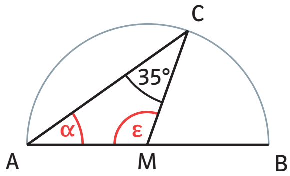
◒ **6** Lina stürmt auf das Tor zu. Sie sieht die Torpfosten unter einem rechten Winkel und ist vom linken Torpfosten nur noch 3 m entfernt. Das Bild zeigt die Draufsicht kurz vor dem Torschuss. Zeichne im Maßstab 1:100. Markiere die Stelle, an der Lina den Ball schießt.



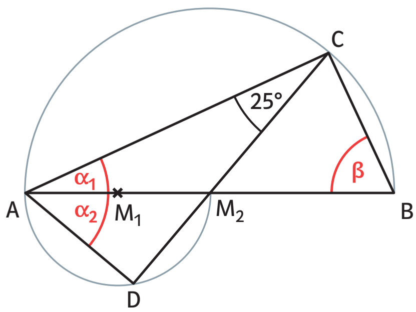
◒ **3** Konstruiere die zwei Dreiecke mit $c = 10\,cm$; $\gamma = 90°$ und
a) $a = 8\,cm$.
b) $a = 6\,cm$.
Was vermutest du? **Prüfe** nach.

● **4** Berechne die rot markierten Winkel.

a)

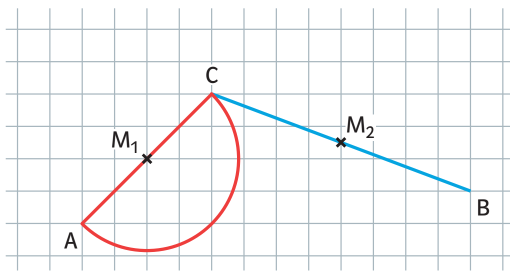


b)



Tipp!
zu Aufgabe **5**
Du kannst die Aufgabe auch mit einer Geometriesoftware lösen.

● **5** Zeichne die Figur und trage nach unten den Thaleskreis mit dem Durchmesser $\overline{BC}$ ein. Was fällt dir auf?
Was beobachtest du, wenn du die Figur mit einer anderen Lage von B noch einmal zeichnest?
Begründe deine Beobachtung.

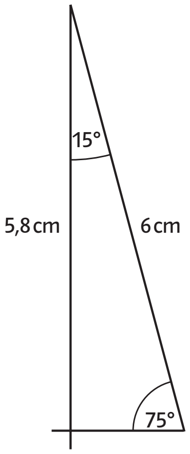


→ Die Lösungen zu „Alles klar?“ findest du auf Seite 248.

Abbildungen: Holtermann, Helmut, Danneberg, 1-4, 6; Wiemers, Sabine, Düsseldorf, 5

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland
ISBN: 978-3-12-744271-7

13 a) Je größer der Anstellwinkel, desto höher reicht die Leiter. Man fertigt eine maßstäbliche Zeichnung für den Anstellwinkel $\alpha = 75°$ an.
Für eine WSW-Konstruktion muss man noch den Winkel γ berechnen:
$\alpha + \beta = 90° + 75° = 165°$; $\gamma = 180° - 165° = 15°$
Es eignet sich der Maßstab 1 : 100.



5,8 cm in der Zeichnung entsprechen 5,8 m in der Wirklichkeit.
Die Leiter reicht maximal 5,80 m hoch.
b) Wenn die Leiter noch steiler steht, kann sie nach hinten umkippen.
Wenn die Leiter ganz flach steht, kann sie wegrutschen.

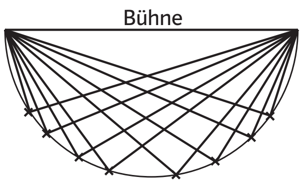
14 Strecken gerundet auf ganze Kilometer.
Obersfeld – Lauter: 16 km
Obersfeld – Sulzthal: 25 km
Obersfeld – Aura: 26 km
Obersfeld – Katzenbach: 20 km
Lauter – Sulzthal: 16 km
Lauter – Aura: 26 km
Lauter – Katzenbach: 22 km
Sulzthal – Aura: 13 km
Sulzthal – Katzenbach: 13 km
Aura – Katzenbach: 6 km

5 Der Satz des Thales — Seite 61

Seite 61

Einstieg

→ Die Kreuze zeigen mehrere Möglichkeiten, den Spot zu platzieren.



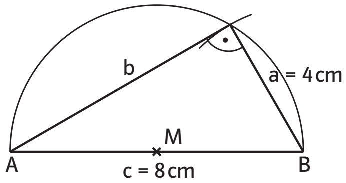
Man stellt fest: Alle möglichen Plätze liegen auf einem Halbkreis. Die Bühnenkante ist der Durchmesser des Halbreises.

5 Der Satz des Thales — Seite 62

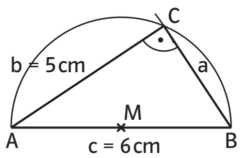
Seite 62

1 Die gemessenen Winkel an den Eckpunkten C, D, E, F und G sind gleich groß; sie betragen 90°.

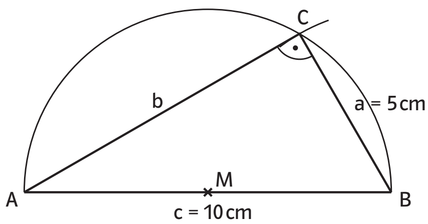
2 Zeichnungen im Maßstab 1 : 2
a)



b)

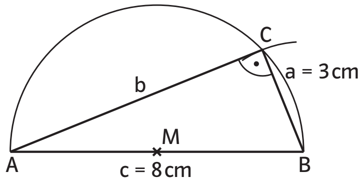


A Zeichnung im Maßstab 1 : 2

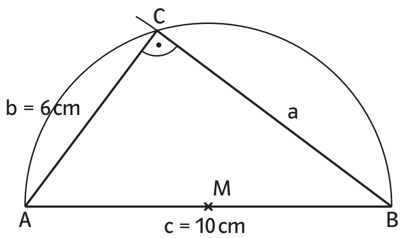


Seite 62, links

3 Zeichnungen im Maßstab 1 : 2
a)



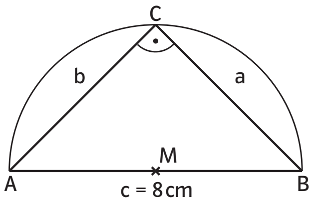
b)



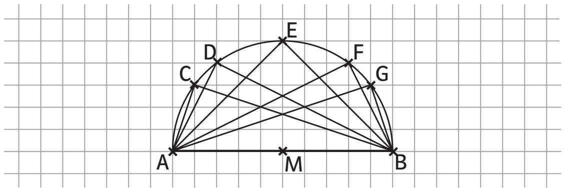
Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland Lösungen
ISBN: 978-3-12-744273-1

4 Zeichnung im Maßstab 1 : 2

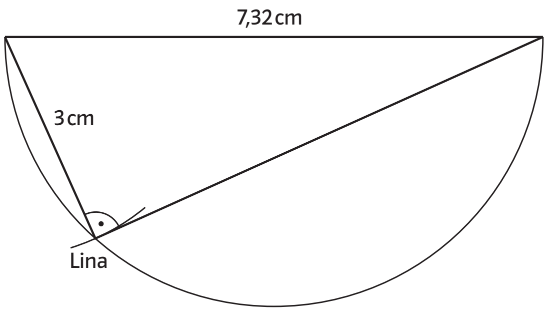


5 Man markiert den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ und zeichnet einen Halbkreisbogen über $\overline{AB}$.



Die Punkte C bis G liegen auf dem Thaleskreis.
Die fünf Dreiecke sind somit rechtwinklig.
Ben hat also recht.

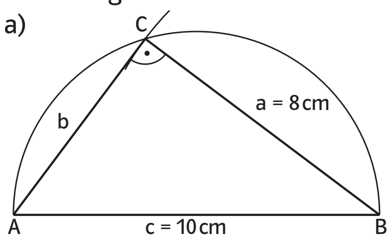
6 Es eignet sich der Maßstab 1 : 100.



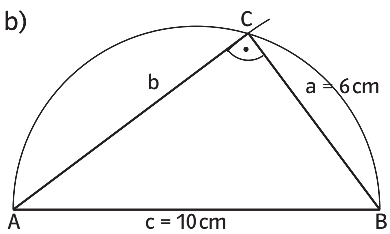
Seite 62, rechts

3 Zeichnungen im Maßstab 1 : 2

a)



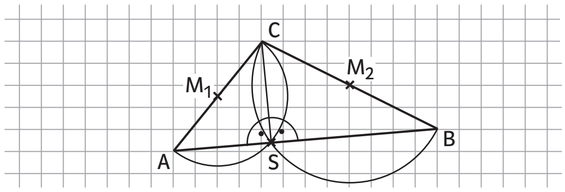
b)



Die Seitenlängen a und b und die Winkel α und β sind in b) gegenüber a) vertauscht.

4 a) Es gilt $\overline{AM} = \overline{CM} = r$ (wobei r Radius des Kreises ist). Das Dreieck AMC ist also gleichschenklig. Damit ist $\alpha = 35°$.
Aus der Winkelsumme im Dreieck erhält man:
$\varepsilon = 180° - 35° - 35° = 110°$.
b) Berechnung der Winkel α_1 und α_2:
Das Dreieck AM_2C ist gleichschenklig, da $\overline{AM_2} = \overline{CM_2}$ (als Radien des gleichen Kreises).
Damit ist $\alpha_1 = 25°$.
Das Dreieck ADC hat einen rechten Winkel in D, weil D auf dem Thaleskreis der Strecke $\overline{AM_2}$ liegt. Damit gilt für den Winkel in A:
$\alpha_1 + \alpha_2 = 180° - 90° - 25° = 65°$.
Da $\alpha_1 = 25°$ gilt, folgt daraus:
$\alpha_2 = 65° - 25° = 40°$.
Berechnung des Winkels β:
Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel in C, weil C auf dem Thaleskreis der Strecke $\overline{AB}$ liegt.
Damit ist $\beta = 180° - 90° - 25° = 65°$.

5

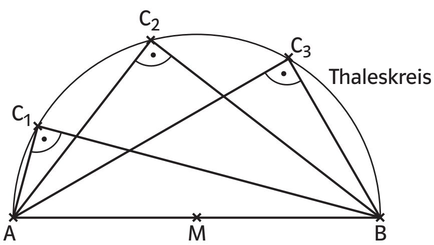


S ist der Schnittpunkt der beiden Thaleskreise.
Die Dreiecke ASC und BCS sind rechtwinklig.
Die zwei rechten Winkel in S ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel. Also liegt S auf der Strecke $\overline{AB}$.
Auch wenn man die Lage von B verändert, bleibt S immer auf der Strecke $\overline{AB}$.

EXTRA: Die Umkehrung des Satzes des Thales — Seite 63

Seite 63

1



Die Punkte A und B kennzeichnen die beiden Leuchttürme. Wenn das Schiff beide Leuchttürme immer unter einem rechten Winkel sieht, dann sind die Punkte C_1, C_2 und C_3 mögliche Standorte des Schiffes.

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland Lösungen
ISBN: 978-3-12-744273-1