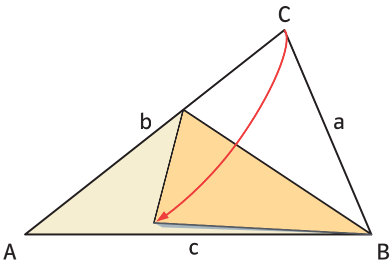
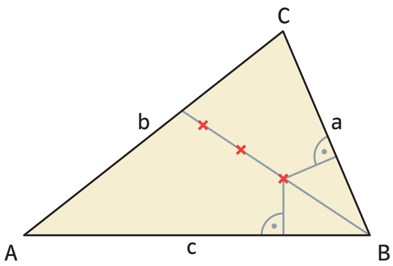
8 Winkelhalbierende. Inkreis





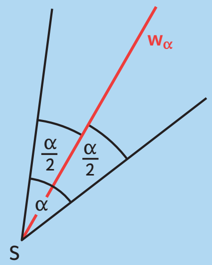
Ein Dreieck kann man so falten, dass zwei benachbarte Seiten zusammenkommen.

→ Schneidet ein Dreieck aus. Faltet a auf c und klappt das Dreieck wieder auf. Markiert auf der Faltlinie mehrere Punkte. Messt den Abstand jedes Punktes zu a und c. Was beobachtet ihr?

→ Faltet dann b auf a und klappt wieder auf. Faltet zuletzt c auf b und klappt wieder auf. Was stellt ihr fest?

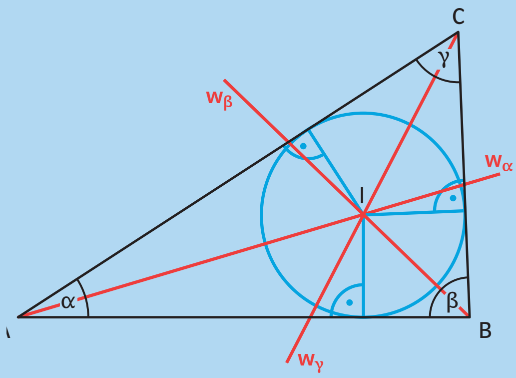
Merke

Die Symmetrieachse des Winkels α heißt **Winkelhalbierende**. Sie geht durch den Scheitel und halbiert die Winkelgröße. Sie wird mit w_α bezeichnet.



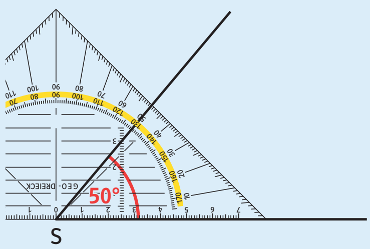
Jeder Punkt auf der Winkelhalbierenden w_α hat von den Schenkeln des Winkels α denselben Abstand.

Im Dreieck ABC schneiden sich die drei Winkelhalbierenden im Punkt I. Der Punkt I hat von allen Seiten des Dreiecks denselben Abstand. Den Kreis um Punkt I mit diesem Abstand als Radius nennt man **Inkreis** des Dreiecks.

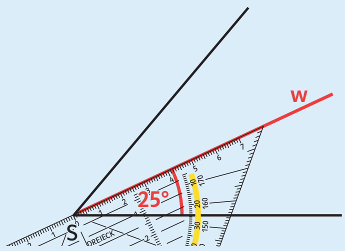


Beispiele

a) Zeichne die Winkelhalbierende des Winkels α mit dem Geodreieck:

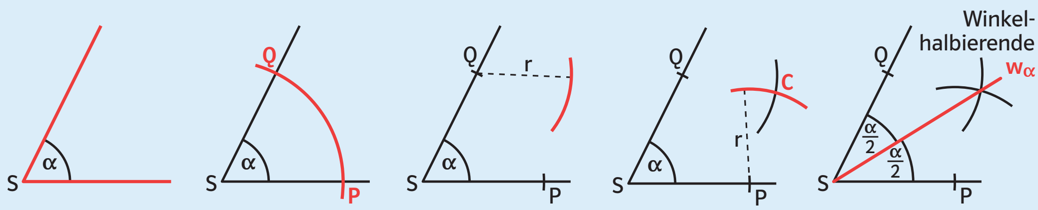


Miss den Winkel α und halbiere seine Größe.



Zeichne den Winkel $\frac{\alpha}{2}$.

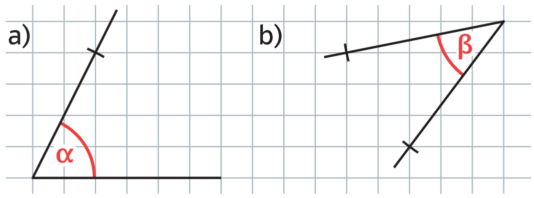
b) Konstruiere die Winkelhalbierende des Winkels α mit Zirkel und Lineal:



Abbildungen: Holtermann, Helmut, Danneberg

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland
ISBN: 978-3-12-744271-7

○ **1** Übertrage den Winkel. Zeichne die Winkelhalbierende ein.

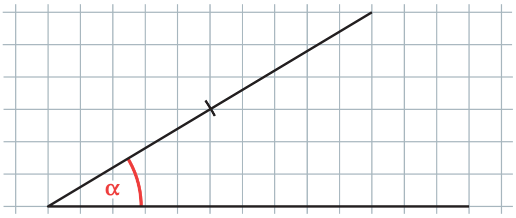


○ **2** Ein Dreieck hat die Eckpunkte A (0 | 0); B (7 | 0) und C (2 | 7).
a) Zeichne das Dreieck.
b) Zeichne die drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ein.
c) Zeichne den Inkreis des Dreiecks.

Alles klar?

Fördern
ba2yd6

A Übertrage den Winkel α. Zeichne die Winkelhalbierende ein und beschrifte sie.

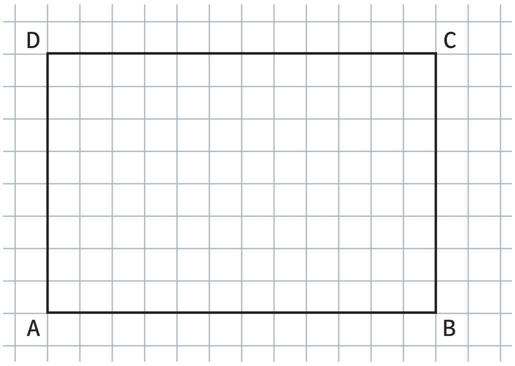


B Ein Dreieck hat die Eckpunkte A (1 | 4); B (12 | 1) und C (9 | 5).
a) Zeichne das Dreieck.
b) Zeichne die drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ein und beschrifte sie.
c) Zeichne den Inkreis des Dreiecks.

○ **3** Zeichne den Winkel. Konstruiere seine Winkelhalbierende mit Zirkel und Lineal.
a) $\alpha = 40°$ b) $\beta = 90°$
c) $\gamma = 120°$ d) $\delta = 280°$

○ **4** Ein Dreieck hat die Eckpunkte A (1 | 1); B (9 | 1) und C (4 | 6).
a) Zeichne das Dreieck.
b) Konstruiere die drei Winkelhalbierenden des Dreiecks mit Zirkel und Lineal.
c) Zeichne den Inkreis des Dreiecks.

◐ **5**
a) Übertrage das Rechteck.

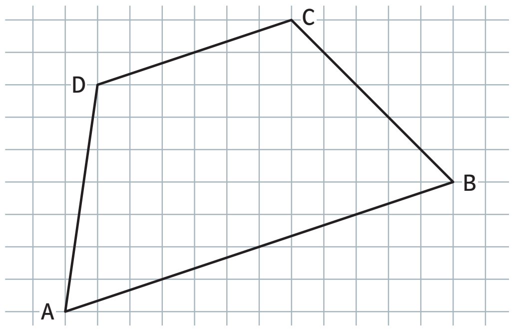


b) Zeichne die Winkelhalbierenden aller vier Winkel ein.
c) Was beobachtet ihr? **Überprüft** eure Beobachtung an anderen Rechtecken. Untersucht auch ein Quadrat.

◐ **3** Der Winkel α hat den Scheitel S. Seine Schenkel verlaufen durch die Punkte A und B. Konstruiere die Winkelhalbierende mit Zirkel und Lineal. Miss zur Kontrolle die Winkel α und $\frac{\alpha}{2}$.
a) S (2 | 2); A (9 | 2); B (6 | 11)
b) S (7 | 1); A (11 | 6); B (1 | 3)

◐ **4** Konstruiere das Dreieck ABC. Konstruiere dann seine Winkelhalbierenden mit Zirkel und Lineal und seinen Inkreis.
a) gleichseitig mit $a = 10\,cm$ (SSS)
b) rechtwinklig mit $a = 6\,cm$; $c = 8\,cm$; $\beta = 90°$ (SWS)

◐ **5**
a) Übertrage das Viereck.



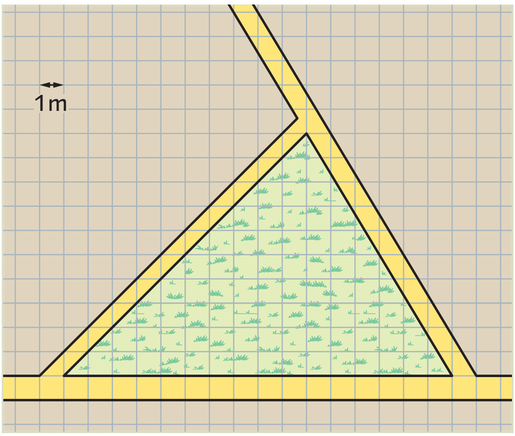
b) Zeichne die Winkelhalbierenden aller vier Winkel ein. Was beobachtest du?
c) **Prüfe** deine Beobachtung an anderen symmetrischen Trapezen.

→ Die Lösungen zu „Alles klar?“ findest du auf Seite 249.

Abbildungen: Holtermann, Helmut, Danneberg

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland
ISBN: 978-3-12-744271-7

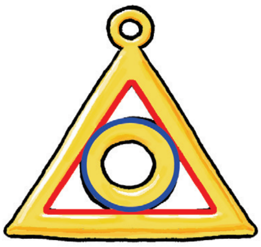
6 Für die Bundesgartenschau soll ein Rasensprenger auf einer dreieckigen Rasenfläche installiert werden.



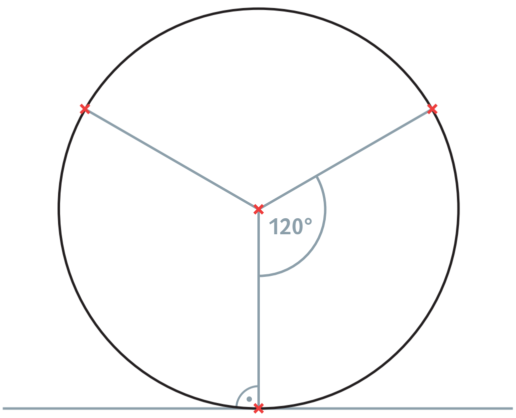
a) Es soll eine möglichst große Rasenfläche bewässert werden und die Wege dürfen nicht nass werden. Wo muss der Rasensprenger aufgestellt werden?
b) Welchen Abstand hat der Rasensprenger zu den Wegen?

Tipp!
zu den Aufgaben 7 und 7
Eine Gerade, die einen Kreis in nur einem Punkt berührt, heißt **Tangente**.

7 Ein Goldschmied möchte einen Anhänger anfertigen. Er soll die Form eines gleichseitigen Dreiecks haben, in dem ein Ring ($r = 2\,\text{cm}$) liegt.

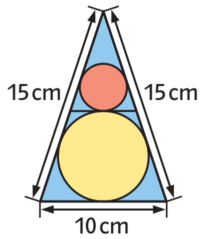


a) Der Goldschmied hat mit seiner Planung begonnen. **Beschreibe**.

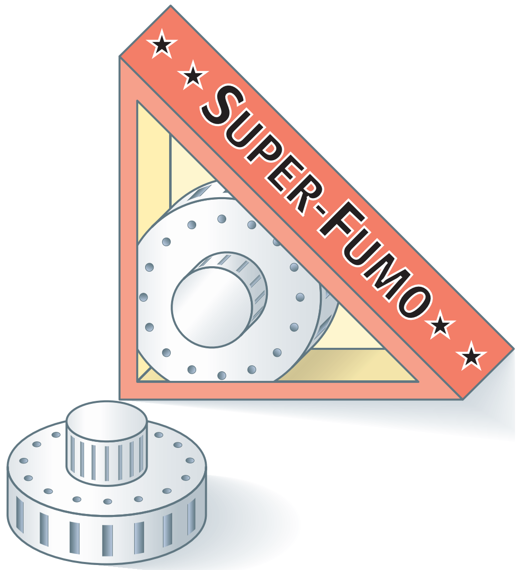


b) Übertrage seinen angefangenen Plan in dein Heft und vervollständige ihn.
c) Gib die Seitenlänge des Anhängers an.

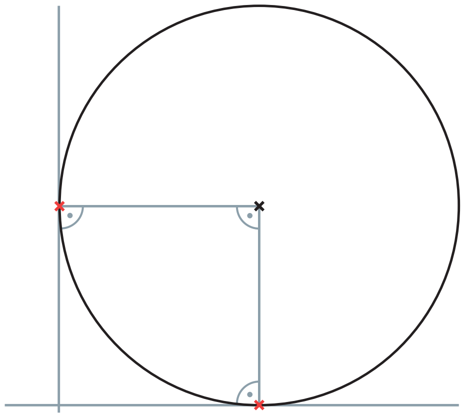
6 Mika hat ein Logo für seine Schülerfirma entworfen. Zeichne das Logo. **Beschreibe** dein Vorgehen.



7 Eine Firma stellt außergewöhnliche Rauchmelder ($d = 10\,\text{cm}$) her. Aus Werbezwecken soll die Grundfläche der Verpackung die Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks haben.



a) Übertrage die angefangene Zeichnung zur Grundfläche der Verpackung auf ein weißes Blatt Papier.

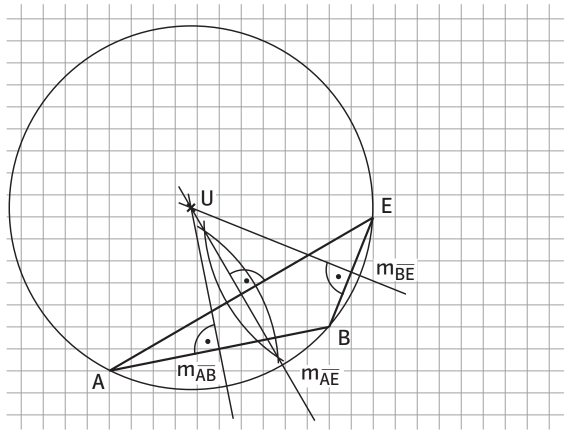


b) Bestimme den Punkt, in dem die fehlende Seite des Dreiecks den Kreis berührt.
c) Konstruiere die fehlende Seite. **Beschreibe** dein Vorgehen.
d) Gib die Seitenlängen des Dreiecks an.

Abbildungen: Holtermann, Helmut, Danneberg, 1-3, 5, 6; Palmowski, Sven, Barcelona, El Prat de Llobregat, 4

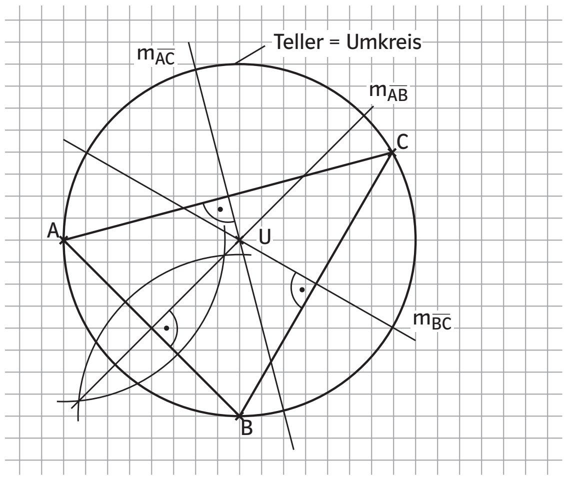
Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland
ISBN: 978-3-12-744271-7

grünes Dreieck ABE:



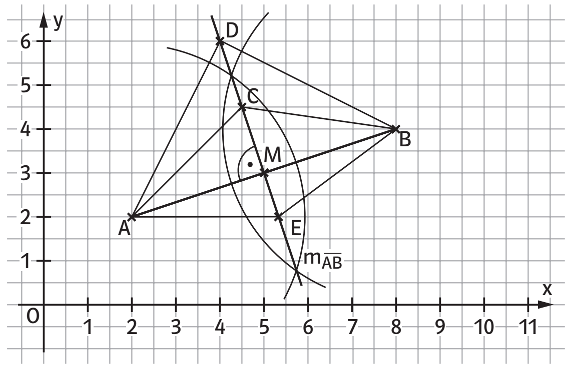
In allen Dreiecken schneiden sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt. Dieser Punkt kann innerhalb des Dreiecks, auf einer Dreiecksseite oder außerhalb des Dreiecks liegen.

4 a)



b) Zuerst zeichnet man mithilfe eines Tellers einen Kreis. Nun legt man drei beliebige Punkte auf dem Kreis fest. In diesem Beispiel sind es die Punkte A, B und C. Zusammen bilden sie das Dreieck ABC. Dann wird zu jeder Dreiecksseite die dazugehörige Mittelsenkrechte eingezeichnet oder mithilfe des Zirkels konstruiert. Die drei Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$, $m_{\overline{AC}}$ und $m_{\overline{BC}}$ schneiden sich im Punkt U.
Der Punkt U ist der Mittelpunkt dieses Kreises bzw. Tellers.

5 a) Mögliche Lösung:



b) Individuelle Wahl der Punkte
Beispiellösung: Für die oben eingezeichneten Punkte C, D und E gilt:
$\overline{AC} = \overline{BC} = 3{,}5\,cm$
$\overline{AD} = \overline{BD} = 4{,}5\,cm$
$\overline{AE} = \overline{BE} = 3{,}3\,cm$
Es fällt auf, dass die Entfernungen von A und B jeweils gleich sind.
Begründung für den Punkt C:
Die Dreiecke AMC und BMC
- haben die Seite $\overline{MC}$ gemeinsam
- haben die gleich langen Seiten $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$
- haben bei M einen rechten Winkel.

Nach SWS gibt es mit diesen Stücken nur ein Dreieck. Daher sind die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang.
Die Begründung gilt für jeden beliebigen Punkt auf $m_{\overline{AB}}$.

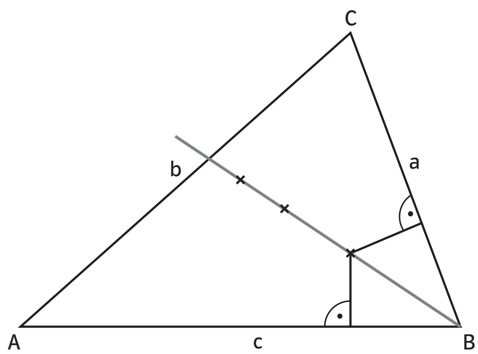
8 Winkelhalbierende. Inkreis Seiten 68, 69

Damit die Lösung übersichtlich bleibt, werden nicht alle Konstruktionsschritte dargestellt.

Seite 68

Einstieg

→

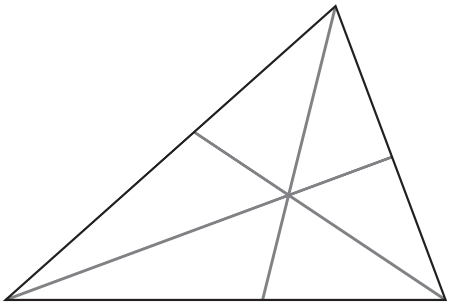


Jeder Punkt auf der Faltlinie ist von den Dreiecksseiten a und c gleich weit entfernt.

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland Lösungen
ISBN: 978-3-12-744273-1

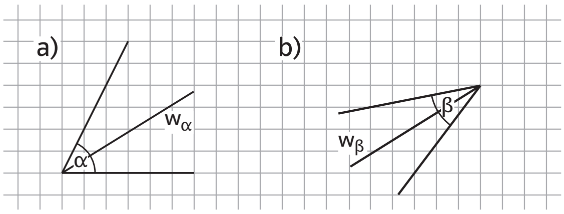
→



Durch die drei Faltungen entstehen drei Linien, die jeweils den dazugehörigen Winkel halbieren. Die drei Linien schneiden sich in einem Punkt.

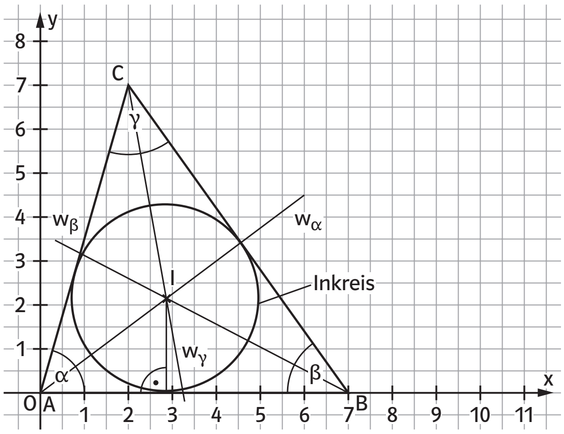
Seite 69

1

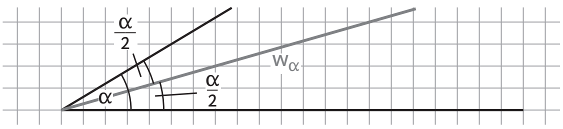


$\frac{\alpha}{2} = 32°$ $\frac{\beta}{2} = 21°$

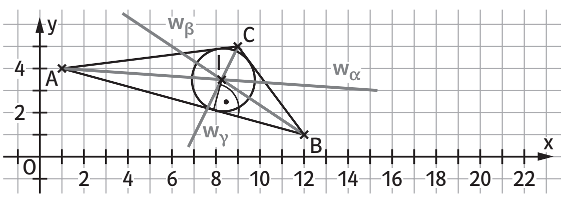
2 a), b) und c)



A

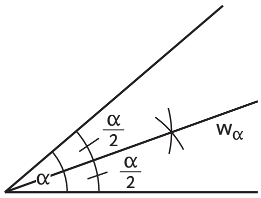


B

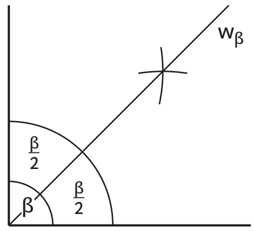


Seite 69, links

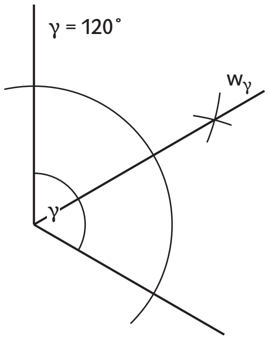
3 a) $\alpha = 40°$



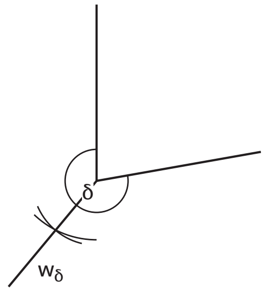
b) $\beta = 90°$



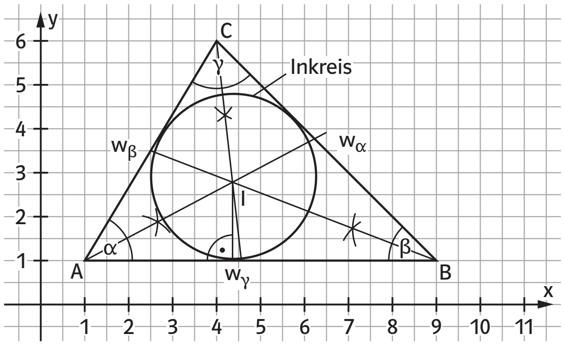
c) $\gamma = 120°$



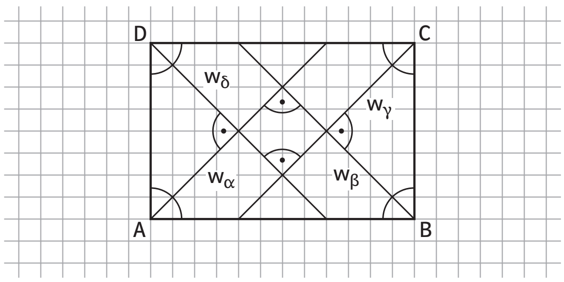
d) $\delta = 280°$



4 a), b) und c)



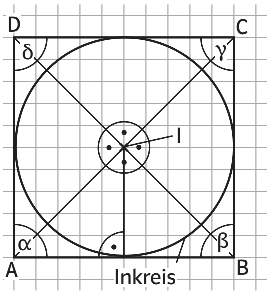
5 a) und b)



Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland Lösungen
ISBN: 978-3-12-744273-1

c) Die Winkelhalbierenden schließen ein Quadrat ein. Das gilt auch für andere Rechtecke.
Sonderfall Quadrat:

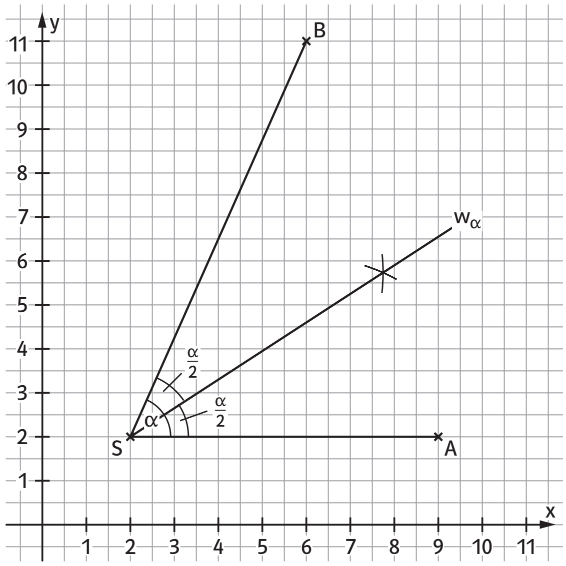


$w_\alpha = w_\gamma$
$w_\beta = w_\delta$

Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Punkt I. Punkt I ist der Mittelpunkt. Diesen nutzt man, um den Inkreis zu zeichnen.

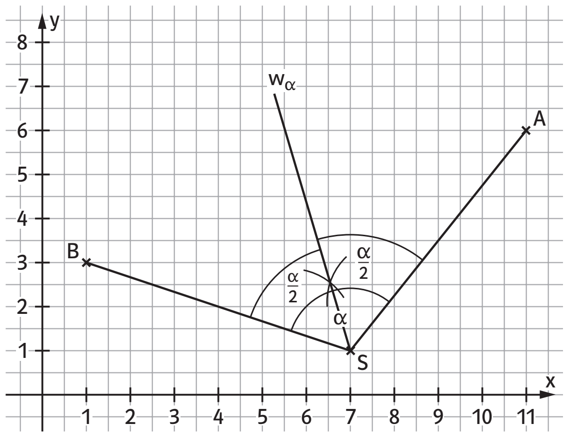
Seite 69, rechts

3 a)



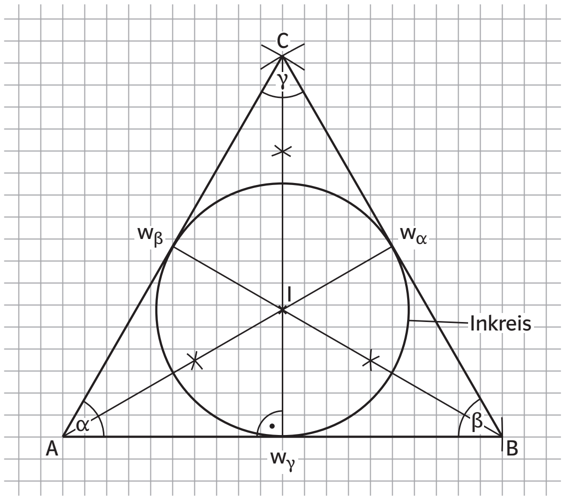
$\alpha = 66°$; $\frac{\alpha}{2} = 33°$

b)

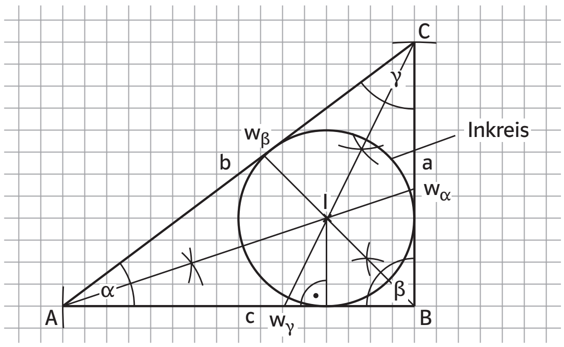


$\alpha = 110°$; $\frac{\alpha}{2} = 55°$

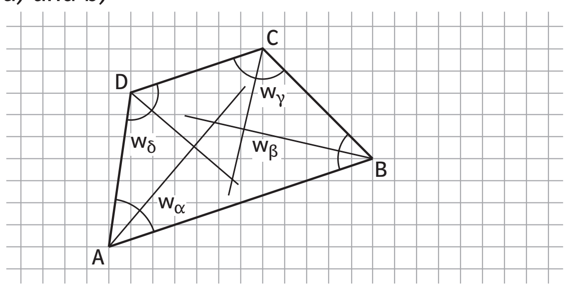
4 a) gleichseitig mit $a = b = c = 10\,\text{cm}$ (SSS)



b) rechtwinklig mit $a = 6\,\text{cm}$; $c = 8\,\text{cm}$; $\beta = 90°$ (SWS)



5 a) und b)



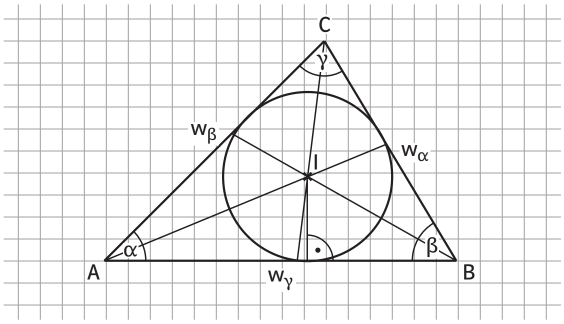
Je zwei Winkelhalbierende schneiden sich in einem Punkt. Das eingeschlossene Viereck ist ein Drachen.
c) Individuelle Lösungen
Obige Beobachtung kann man durch Zeichnen von weiteren symmetrischen Trapezen überprüfen.

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland Lösungen
ISBN: 978-3-12-744273-1

Seite 70, links

6 a)

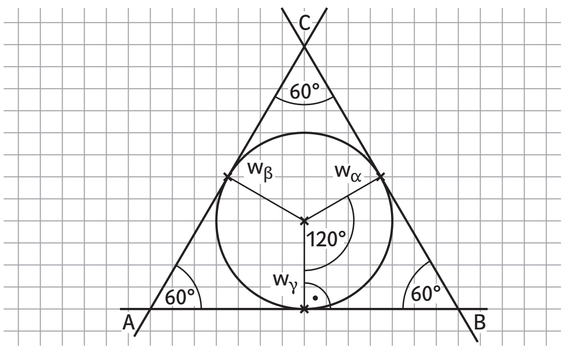


Zuerst zeichnet man die drei Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ ein. Diese schneiden sich im Punkt I. Der Rasensprenger muss am Punkt I aufgestellt werden, dann wird eine möglichst große Rasenfläche bewässert und die Wege werden nicht nass.

b) Der Rasensprenger hat zu den drei Wegen immer den gleichen Abstand von knapp 4 m.

7 a) Der Goldschmied hat einen Kreis mit dem Radius $r = 2\,\text{cm}$ gezeichnet. Da der Anhänger die Form eines gleichseitigen Dreiecks haben soll, hat der Anhänger auch drei gleich große Winkel. Daher unterteilt man die 360° des Kreises in drei gleich große Winkel, also 120°. Ausgehend vom Mittelpunkt des Kreises hat man nun auch drei Punkte auf dem Kreis. An jedem dieser drei Punkte zeichnet man die dazugehörige Tangente.

b)

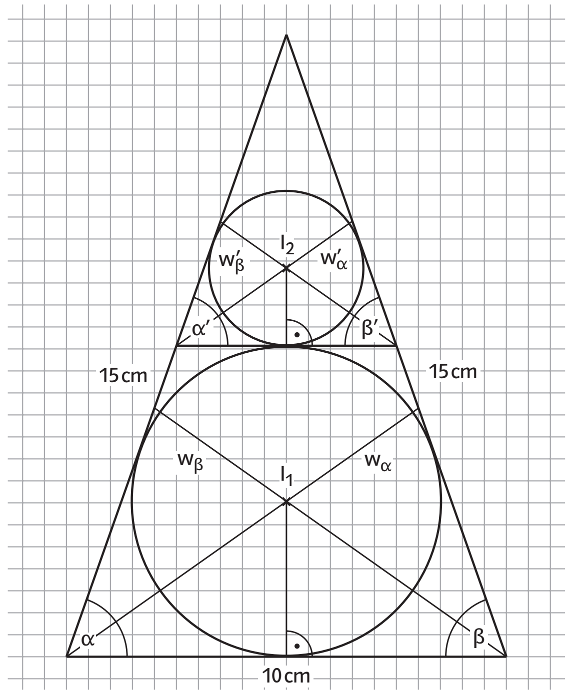


Der Anhänger hat die Form des gleichseitigen Dreiecks ABC. Der Inkreis des Dreiecks ABC stellt den inneren Kreis dar.

c) Die gemessene Seitenlänge des Anhängers beträgt ungefähr 6,9 cm.

Seite 70, rechts

6



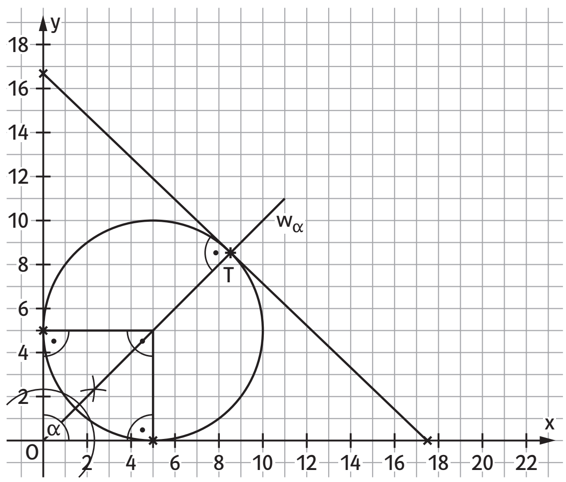
Zuerst zeichnet man die Basis mit 10 cm. Dann zeichnet man mit dem Zirkel die Länge 15 cm vom linken und rechten Ende der Basis ein. Der Schnittpunkt ist die Spitze.

Als nächstes zeichnet man die Winkelhalbierenden w_α und w_β ein. Der Schnittpunkt ist zugleich der Mittelpunkt I_1 des gelben Inkreises.

Am oberen Ende des gelben Inkreises zeichnet man eine Tangente. Ausgehend vom linken und rechten Ende der Tangente zeichnet man die Winkelhalbierenden w'_α und w'_β ein. Der Schnittpunkt von w'_α und w'_β ist zugleich der Mittelpunkt I_2 des roten Inkreises.

7 a), b) und c)

$d = 10\,\text{cm}$; $r = 5\,\text{cm}$



Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland Lösungen
ISBN: 978-3-12-744273-1

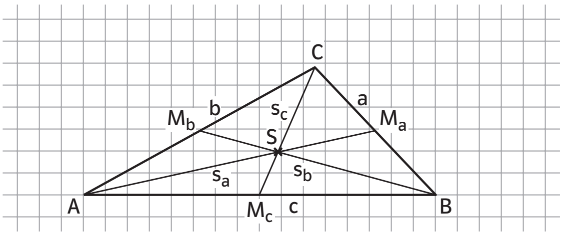
Man zeichnet die Winkelhalbierende w_α ein. Der Schnittpunkt T von w_α mit dem Kreis ist der Punkt, an dem die fehlende Seite des Dreiecks den Kreis berührt. Am Schnittpunkt T zeichnet man die Tangente ein und verlängert diese bis sie beide Schenkel des Dreiecks schneidet.

d) Beide Schenkel sind ca. 17 cm lang. Die fehlende Seite (Hypotenuse) ist ca. 24 cm lang.

EXTRA: Seitenhalbierende Seite 71

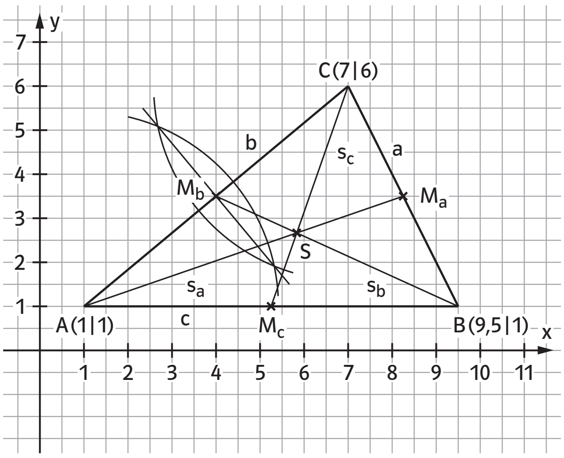
Seite 71

1 a) Mögliche Lösung



b) Individuelle Lösungen

2 a) und b)



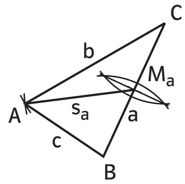
c)

Seitenhalbierende	Entfernung des Schwerpunkts zum Eckpunkt	Entfernung des Schwerpunkts zum Seitenmittelpunkt
s_a	$\overline{SA}$ = 5,1 cm	$\overline{SM_a}$ = 2,6 cm
s_b	$\overline{SB}$ = 4,0 cm	$\overline{SM_b}$ = 2,0 cm
s_c	$\overline{SC}$ = 3,6 cm	$\overline{SM_c}$ = 1,8 cm

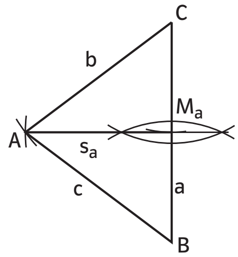
d) Die Eckpunkte A,B,C sind doppelt soweit vom Schwerpunkt S entfernt als die Seitenmittelpunkte M_a, M_b, M_c.

3 Zeichnungen im Maßstab 1 : 2

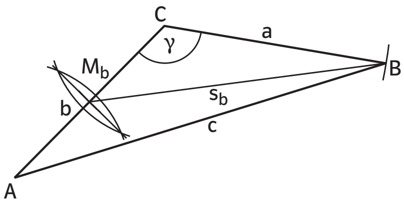
a) b = 4,4 cm; a = 4 cm; s_a = 3 cm



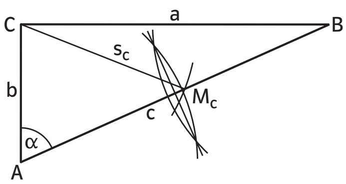
b) a = 6 cm; c = 5 cm; s_a = 4 cm



c) b = 7,6 cm; s_b = 8 cm; γ = 125°

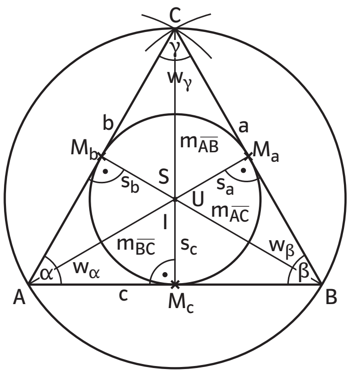


d) b = 3,9 cm; s_c = 5 cm; α = 66°



4 Zeichnungen im Maßstab 1 : 2

a = b = c = 8 cm



In einem gleichseitigen Dreieck gilt:
a = b = c und α = β = γ
Darüber hinaus stellt man fest:
$w_\alpha = s_a = m_{\overline{BC}}$; $w_\beta = s_b = m_{\overline{AC}}$; $w_\gamma = s_c = m_{\overline{AB}}$
Daraus folgt:
Der Schwerpunkt S, der Mittelpunkt U und der Mittelpunkt I fallen in einem gleichseitigen Dreieck zusammen. Also S = U = I.

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Schnittpunkt Mathematik 7
Differenzierende Ausgabe Rheinland-Pfalz und Saarland Lösungen
ISBN: 978-3-12-744273-1