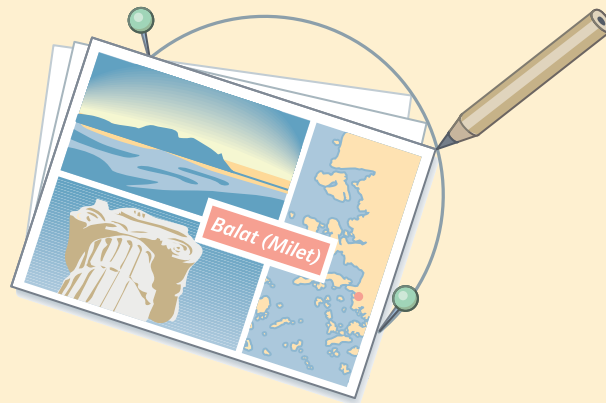


## 2 Der Satz des Thales



Zwei Stecknadeln und eine Postkarte „sind“ ein Zirkel!

In Fig. 1 ist ein Halbkreis mit dem Durchmesser  $\overline{AB}$  dargestellt. Die eingezeichneten Dreiecke haben alle die Seite  $\overline{AB}$  gemeinsam. Der dritte Eckpunkt liegt jeweils auf dem Halbkreis. Es lässt sich vermuten, dass alle so gezeichneten Dreiecke rechtwinklig sind. Der rechte Winkel liegt jeweils bei C.

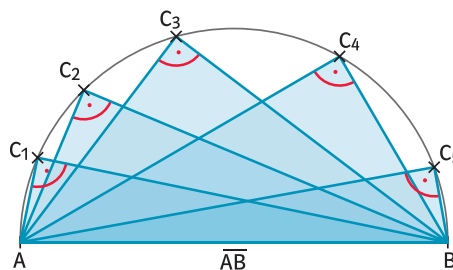


Fig. 1

Diese Vermutung soll allgemein überprüft werden. Dazu wird das Dreieck in Fig. 2 betrachtet:

- Die Punkte A, B und C liegen auf dem Halbkreis mit dem Mittelpunkt M. Somit sind sie vom Mittelpunkt M gleich weit entfernt. Es gilt also  $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ .
- Folglich sind die Dreiecke AMC und CMB gleichschenkelig. In gleichschenkeligen Dreiecken sind die Basiswinkel gleich groß. Es gilt also  $\alpha = \gamma_1$  und  $\beta = \gamma_2$ .
- Die Summe der Innenwinkel im Dreieck ABC beträgt  $180^\circ$ , also ist  $\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$ .
- Da  $\alpha = \gamma_1$  und  $\beta = \gamma_2$  gilt, kann man in der Gleichung für  $\alpha$  und  $\beta$  entsprechend  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  einsetzen. Man erhält  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$  bzw.  $2 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) = 180^\circ$ . Somit muss  $\gamma_1 + \gamma_2 = 90^\circ$  sein. Das Dreieck ABC hat also bei C einen rechten Winkel.

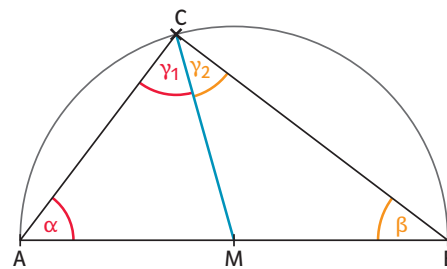
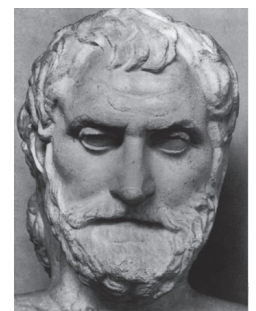
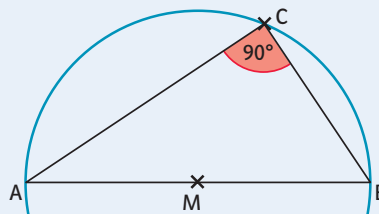


Fig. 2

Zu diesem Fazit kam auch Thales von Milet, nach dem der mathematische Satz benannt ist.

### Satz des Thales

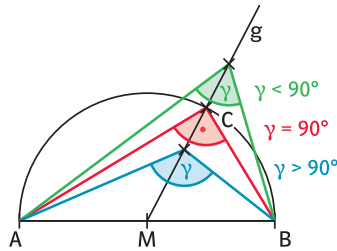
Wenn der Punkt C eines Dreiecks  $\overline{ABC}$  auf einem Kreis mit dem Durchmesser  $\overline{AB}$  und dem Mittelpunkt M liegt, dann hat das Dreieck am Punkt C einen rechten Winkel. Der Kreis mit dem Durchmesser  $\overline{AB}$  heißt **Thaleskreis** über der Strecke  $\overline{AB}$ .



Thales von Milet lebte ca. 600 v. Chr. Milet liegt in der heutigen Türkei.

Es gilt auch die **Umkehrung des Satzes des Thales**: Wenn ein Punkt C mit zwei Punkten A und B ein rechtwinkliges Dreieck bildet, dann liegt der Punkt C auf dem Thaleskreis über der Strecke AB.

Dies kann man sehen, wenn man den Eckpunkt C des roten Dreiecks ABC auf der Halbgeraden g bewegt. Nach dem Satz des Thales ist der Winkel bei C ein rechter Winkel. Sobald man den Eckpunkt C auf der Halbgeraden g ins Innere des Halbkreises auf den Mittelpunkt M zubewegt, vergrößert sich der Winkel bei C. Bewegt man C umgekehrt von M weg, so verkleinert sich der Winkel.



### Beispiel 1 Rechtwinklige Dreiecke konstruieren

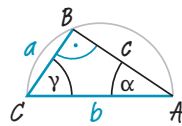
Konstruiere mit dem Satz des Thales das Dreieck ABC mit  $\overline{BC} = 3 \text{ cm}$ ,  $\overline{AC} = 5 \text{ cm}$  und  $\beta = 90^\circ$ . Miss die Größen der Winkel sowie die fehlende Seitenlänge.

#### Lösung

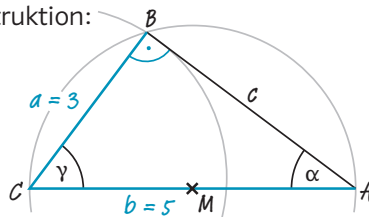
Zeichne zunächst eine Planfigur. Der rechte Winkel  $\beta$  muss am Punkt B liegen.

1. Zeichne die Strecke  $\overline{AC} = 5 \text{ cm}$ .
2. Markiere den Mittelpunkt M der Strecke  $\overline{AC}$  und zeichne den Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AC}$ .
3. Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt C und dem Radius  $r = \overline{BC} = 3 \text{ cm}$ .
4. Bestimme den Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Thaleskreis und bezeichne ihn mit B.
5. Zeichne die Seiten ein und miss die Länge der Seite  $\overline{AB}$  und die Winkel:  $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ ,  $\gamma \approx 53^\circ$ ,  $\alpha \approx 37^\circ$

Planfigur:



Konstruktion:



### Beispiel 2 Tangenten konstruieren

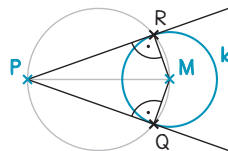
Konstruiere diejenigen Tangenten an einen Kreis k, die durch einen Punkt P außerhalb des Kreises verlaufen.

#### Lösung

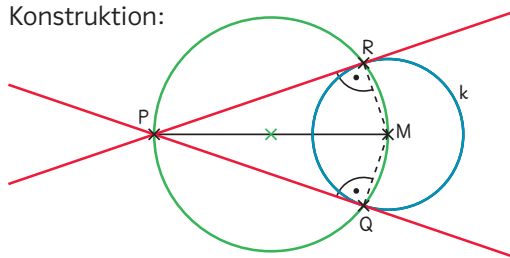
Zeichne zunächst eine Planfigur. Im Berührungspunkt der Tangente mit dem Kreis stehen nach dem Satz des Thales die Tangente und der Radius des Kreises jeweils im rechten Winkel zueinander.

1. Konstruiere den Mittelpunkt der Strecke  $\overline{PM}$ .
2. Zeichne den Thaleskreis über  $\overline{PM}$  (grün).
3. Verbinde die mit dem Kreis k entstandenen Schnittpunkte Q und R jeweils mit P (rot).

Planfigur:



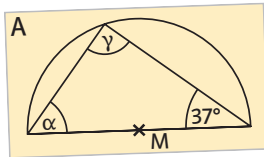
Konstruktion:



## Aufgabe

- 1 a) Konstruiere fünf Dreiecke mit  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$  und  $\gamma = 90^\circ$ .
- b) Zeichne einen Kreis mit dem Radius 4 cm und markiere den Mittelpunkt. Bestimme drei Punkte A, B und C auf dem Kreis so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

- 2 Der Punkt M ist jeweils der Mittelpunkt des dargestellten Halbkreises. Ordne den Kärtchen mit den Winkelgrößen jeweils (wenn möglich) die passende Abbildung zu.



1  $\beta = 62^\circ$

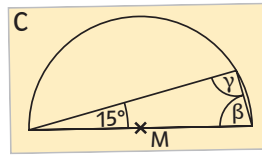
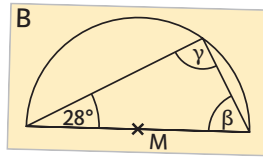
2  $\gamma = 90^\circ$

3  $\alpha = 53^\circ$

4  $\alpha = 45^\circ$

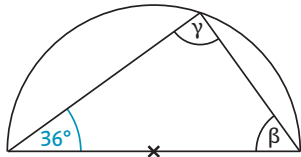
5  $\beta = 15^\circ$

6  $\beta = 75^\circ$

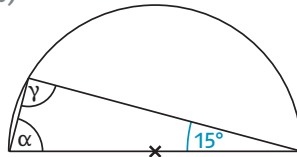


- 3 Bestimme die Größen der bezeichneten Winkel.

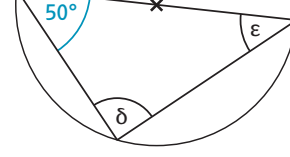
a)



b)



c)



- 4 Skizziere zunächst eine Planfigur. Konstruiere dann das Dreieck. Beschreibe dein Vorgehen. Bestimme durch Messung die Größen der Winkel sowie die weiteren Seitenlängen.

a)  $\overline{AB} = 9 \text{ cm}$ ;  $\overline{AC} = 6 \text{ cm}$ ;  $\gamma = 90^\circ$

b)  $\overline{AC} = 7 \text{ cm}$ ;  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ ;  $\beta = 90^\circ$

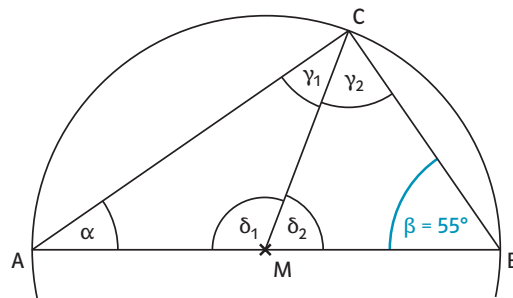
c)  $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ ;  $\overline{AC} = 5 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 90^\circ$

d)  $\alpha = 90^\circ$ ;  $a = 8 \text{ cm}$ ;  $b = 1 \text{ cm}$

e)  $\beta = 90^\circ$ ;  $a = 7 \text{ cm}$ ;  $b = 7,5 \text{ cm}$

f)  $\gamma = 90^\circ$ ;  $a = 5 \text{ cm}$ ;  $c = 5,8 \text{ cm}$

- 5 In der Figur rechts ist der Punkt M der Mittelpunkt des dargestellten Kreises. Mithilfe der gegebenen Größe des Winkels  $\beta$  kann man die anderen Winkelgrößen in der Figur bestimmen. Die blauen Kärtchen geben an, in welcher Reihenfolge man hierbei vorgehen kann. Auf den gelben Kärtchen sind entsprechende Begründungen abgebildet. Ordne den Satzanfängen auf den blauen Kärtchen jeweils die passende Begründung auf den gelben Kärtchen zu.



1 Die Dreiecke AMC und BCM sind gleichschenkelig,

2  $\beta = \gamma_2 = 55^\circ$ ,

3 Es gilt  $\delta_2 = 70^\circ$ ,

4 Es gilt  $\delta_1 = 110^\circ$ ,

5 Die Winkel  $\alpha$  und  $\gamma_1$  sind gleich groß,

6  $\alpha = \gamma_1 = (180^\circ - 110^\circ) : 2 = 35^\circ$ ,

7 Das Dreieck ABC hat am Punkt C einen rechten Winkel,

A weil das Dreieck AMC gleichschenkelig ist.

B weil die Summe der Winkel  $\delta_1$ ,  $\alpha$  und  $\gamma_1$   $180^\circ$  beträgt und weil die Winkel  $\alpha$  und  $\gamma_1$  gleich groß sind.

C weil die Punkte A, B und C alle auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen.

D weil das Dreieck BCM gleichschenkelig ist.

E weil  $\gamma_1 + \gamma_2 = 55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$  ist.

F weil die Summe der Winkel  $\delta_2$ ,  $\beta$  und  $\gamma_2$   $180^\circ$  beträgt.

G weil  $\delta_1$  und  $\delta_2$  Nebenwinkel sind.

- 6 Zeichne in ein Koordinatensystem einen Kreis  $k$  um den Punkt  $M(4 | 4)$  mit dem Radius  $r = 3$ . Konstruiere die Tangenten vom Punkt  $P(12 | 5)$  an den Kreis.

Du findest Hilfe im Beispiel 2 auf Seite 84.

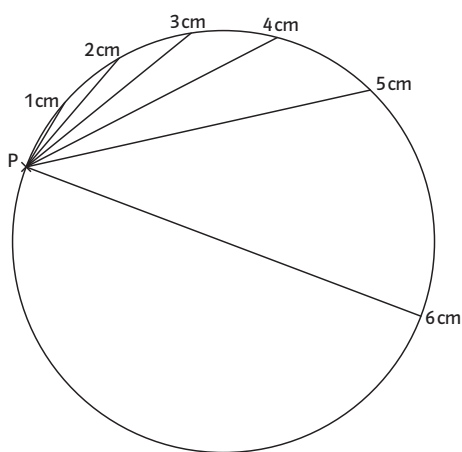
**6**  
 Um den Kreis zu rekonstruieren, werden zuerst zwei Sehnen des Kreisbogens eingezeichnet. Für jede Sehne wird die Mittelsenkrechte konstruiert. Der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Kreises. Nun kann der Abstand des Kreismittelpunktes zum Kreisabschnitt bestimmt und der Kreis rekonstruiert werden.

**7**  
 1. Fall:  $\sphericalangle QMP < 180^\circ$ .  
 Die Punkte QSPM bilden ein Drachenviereck.  
 2. Fall:  $\sphericalangle QMP = 180^\circ$ .  
 Es entsteht kein Drachenviereck mehr, da die beiden Tangenten parallel zueinander verlaufen.  
 3. Fall:  $\sphericalangle QMP > 180^\circ$ .  
 Die Tangenten schneiden sich im Punkt  $S_1$  und die Punkte Q, M, P und  $S_1$  bilden ein Drachenviereck.

**8**  
 Zeichne in den Kreis drei Radien, sodass der Winkel zwischen ihnen gleich groß, also gleich  $120^\circ$  ist. Die zugehörigen Tangenten bilden dann ein Dreieck, das drei gleich große Winkel hat und daher gleichseitig ist.

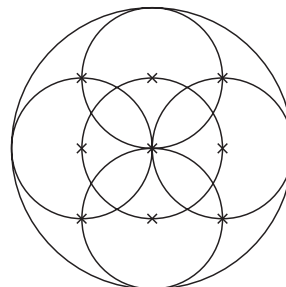


**9**  
 a)



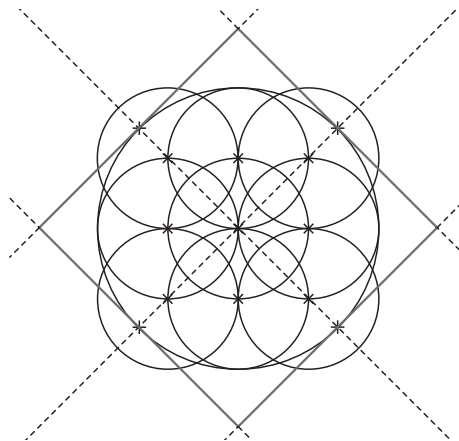
b) Die weiteste Entfernung, die zwei Kreispunkte voneinander haben können, ist der Durchmesser des Kreises. Da der Radius 3 cm lang ist, beträgt der Durchmesser 6 cm. Daher können die Endpunkte der Sehne nicht weiter als 6 cm auseinander liegen.

**11**  
 Anleitung: Zeichne einen Kreis mit Radius 4 cm und darin zwei Diagonalen, die senkrecht aufeinander stehen. Ermittle die Mittelpunkte der so entstandenen vier Radien und zeichne um diese sowie um den Mittelpunkt des großen Kreises jeweils einen Kreis mit Radius 2 cm.



Maßstab 1:2

Zeichne nun um jeden der Schnittpunkte der äußeren Kreise jeweils einen Kreis mit Radius 2 cm. Zeichne die Diagonalen durch diese Schnittpunkte und bestimme die Schnittpunkte der Diagonalen und des großen Kreises. Dies sind die Berührungspunkte der zu konstruierenden Tangenten, um schließlich das Quadrat zu erhalten.



**12**  
 individuelle Lösung

## 2 Der Satz des Thales

Seite 83

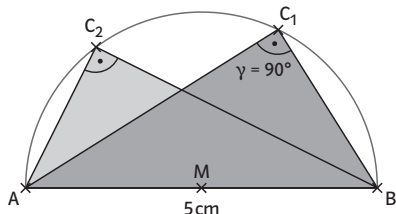
### Einstiegsaufgabe

Legt man eine rechteckige Postkarte zwischen zwei Stecknadeln, so bilden die beiden Stecknadeln gemeinsam mit der Ecke der Postkarte ein rechtwinkliges Dreieck. Zeichnet man mit einer gleichmäßigen Drehbewegung der Postkarte an der Ecke der Postkarte eine Linie, so entsteht eine Kreislinie, genauer gesagt, ein Halbkreis über der Strecke zwischen den beiden Stecknadeln. Dies lässt sich mit dem in der Lerneinheit vorgestellten Beweis des Satzes von Thales begründen.

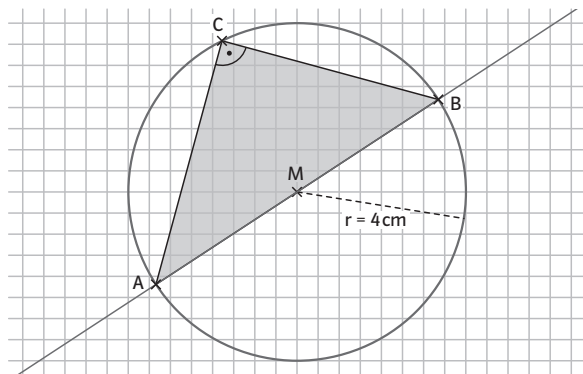
Seite 84

1

- a) 1. Zeichne die Strecke  $\overline{AB} = 5\text{ cm}$ .
  2. Zeichne den Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AB}$ .
  3. Wähle für C fünf beliebige Punkte auf dem Thaleskreis.
  4. Zeichne jeweils die Dreiecke ABC.
- Im Folgenden sind zwei solche Dreiecke dargestellt.



- b) 1. Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius 4 cm.
  2. Zeichne eine Gerade durch M.
  3. Benenne die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis mit A und B.
  4. Wähle einen beliebigen Punkt C auf dem Kreisbogen über AB.
- Das Dreieck ABC erfüllt die Aufgabenstellung.



Seite 85

2

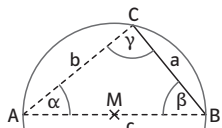
- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1 → B;                   | 2 → A, B, C;             |
| 3 → A;                   | 4 → kein Kärtchen passt; |
| 5 → kein Kärtchen passt; | 6 → C                    |

3

- |   |   |
|---|---|
| a) $\gamma = 90^\circ; \beta = 54^\circ$    | b) $\gamma = 90^\circ; \alpha = 75^\circ$ |
| c) $\delta = 90^\circ; \epsilon = 40^\circ$ |   |

4

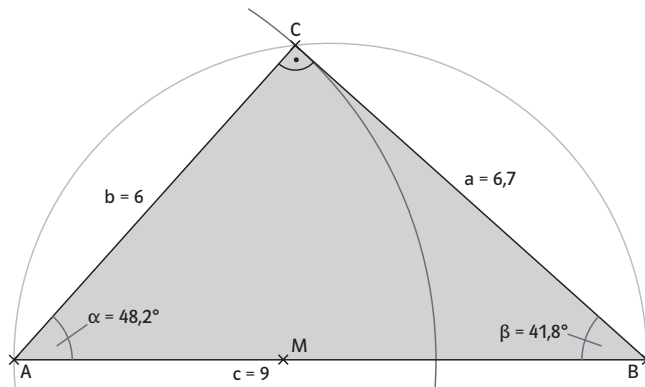
a) Planfigur:



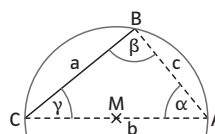
Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei C. Deshalb liegt C auf dem Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AB}$ .

Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke  $\overline{AB} = 9\text{ cm}$ .
  2. Zeichne den Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AB}$ .
  3. Zeichne einen Kreis um A mit Radius 6 cm.
  4. Beschrifte den Schnittpunkt des Kreises mit dem Thaleskreis über  $\overline{AB}$  mit C.
- Das Dreieck ABC erfüllt die Aufgabenstellung.



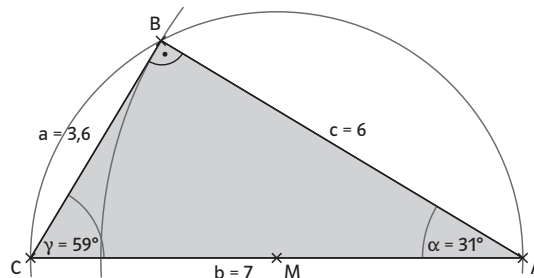
b) Planfigur:



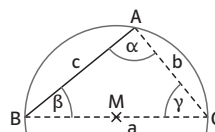
Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei B. Deshalb liegt B auf dem Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AC}$ .

Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke  $\overline{AC} = 7\text{ cm}$ .
  2. Zeichne den Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AC}$ .
  3. Zeichne einen Kreis um A mit Radius 6 cm.
  4. Beschrifte den Schnittpunkt des Kreises mit dem Thaleskreis über  $\overline{AC}$  mit B.
- Das Dreieck ABC erfüllt die Aufgabenstellung.



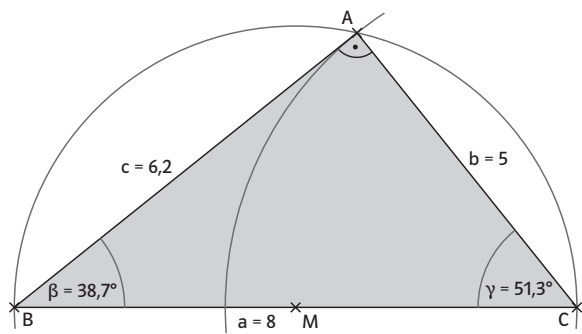
c) Planfigur:



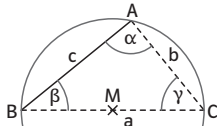
Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei A. Deshalb liegt A auf dem Thaleskreis über der Strecke  $\overline{BC}$ .

Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke  $\overline{BC} = 8\text{ cm}$ .
  2. Zeichne den Thaleskreis über der Strecke  $\overline{BC}$ .
  3. Zeichne einen Kreis um C mit dem Radius 5 cm.
  4. Beschrifte den Schnittpunkt des Kreises mit dem Thaleskreis über  $\overline{BC}$  mit A.
- Das Dreieck ABC erfüllt die Aufgabenstellung:



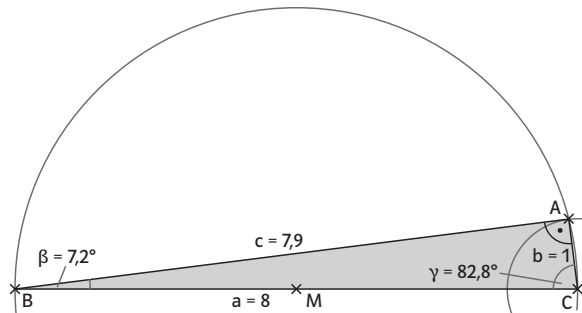
d) Planfigur:



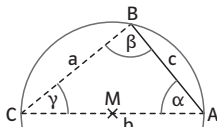
Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei A. Deshalb liegt A auf dem Thaleskreis über der Strecke  $\overline{BC}$ .  
Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke  $\overline{BC} = 8\text{ cm}$ .
2. Zeichne den Thaleskreis über der Strecke  $\overline{BC}$ .
3. Zeichne einen Kreis um C mit dem Radius 1 cm.
4. Beschrifte den Schnittpunkt des Kreises mit dem Thaleskreis über  $\overline{BC}$  mit A.

Das Dreieck ABC erfüllt die Aufgabenstellung:



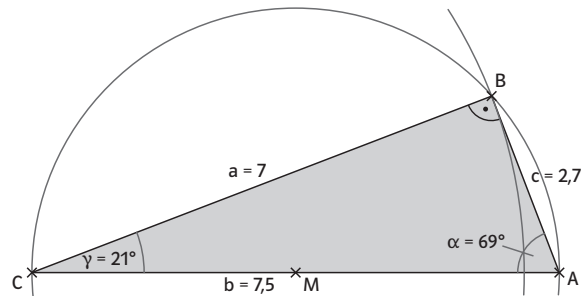
e) Planfigur:



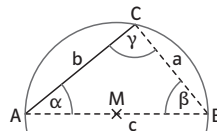
Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei B. Deshalb liegt B auf dem Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AC}$ .  
Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke  $\overline{AC} = 7,5\text{ cm}$ .
2. Zeichne den Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AC}$ .
3. Zeichne einen Kreis um C mit dem Radius 7 cm.
4. Beschrifte den Schnittpunkt des Kreises mit dem Thaleskreis über  $\overline{AC}$  mit B.

Das Dreieck ABC erfüllt die Aufgabenstellung:



f) Planfigur:

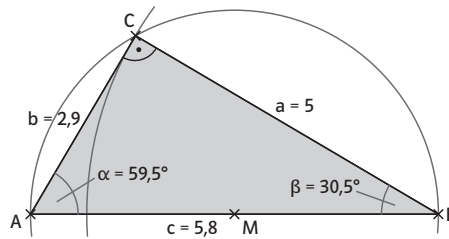


Das Dreieck hat einen rechten Winkel bei C. Deshalb liegt C auf dem Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AB}$ .

Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke  $\overline{AB} = 5,8\text{ cm}$ .
2. Zeichne den Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AB}$ .
3. Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius 5 cm.
4. Beschrifte den Schnittpunkt des Kreises mit dem Thaleskreis über  $\overline{AB}$  mit C.

Das Dreieck ABC erfüllt die Aufgabenstellung:



5

- |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|
| 1 → C; | 2 → D; | 3 → F; | 4 → G; |
| 5 → A; | 6 → B; | 7 → E  |        |

6

1. Zeichne die Strecke  $\overline{MP}$  ein.
2. Konstruiere den Mittelpunkt A der Strecke  $\overline{MP}$ .
3. Zeichne einen Kreis um den Punkt A, der die Punkte P und M enthält.
4. Zeichne die zwei entstandenen Schnittpunkte R und Q der beiden Kreise ein.
5. Verbinde jeweils Punkt R und Punkt Q mit dem Punkt P.

Die Gerade  $t_1$  durch Punkt R und P sowie die Gerade  $t_2$  durch Punkt Q und P sind die gesuchten Tangenten.

