

3 Mittelsenkrechte konstruieren

Der Platzwart will auf einem Fußballfeld den Elfmeterpunkt markieren.
Wie kann er diesen Punkt genau finden?



Ein Blatt Papier, auf dem eine Strecke \overline{AB} eingezeichnet ist, wird so gefaltet, dass der Punkt A auf dem Punkt B liegt (siehe Fig. 1). Die Faltlinie ist dann senkrecht zur Strecke \overline{AB} und geht durch ihren Mittelpunkt M. Man nennt diese Gerade die **Mittelsenkrechte** der Strecke \overline{AB} und bezeichnet sie mit $m_{\overline{AB}}$.

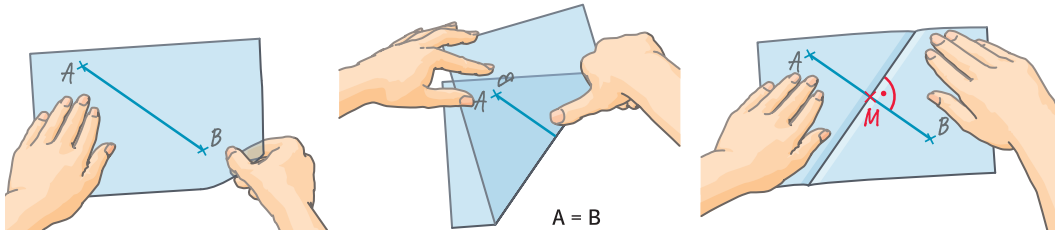


Fig. 1

Anstatt mit dem Geodreieck kann man die Mittelsenkrechte auch mit **Zirkel und Lineal** konstruieren. Dazu geht man folgendermaßen vor:

1. Man zeichnet um die Punkte A und B zwei sich schneidende Kreise mit dem gleichen Radius.
 2. Man zeichnet die Gerade durch die beiden Schnittpunkte C und D der Kreise.
- Punkte auf der Mittelsenkrechte haben eine besondere Eigenschaft: Liegt P auf $m_{\overline{AB}}$, dann hat P den gleichen Abstand d zu A und zu B (siehe Fig. 2).

① – ③:
Reihenfolge der
Konstruktionschritte

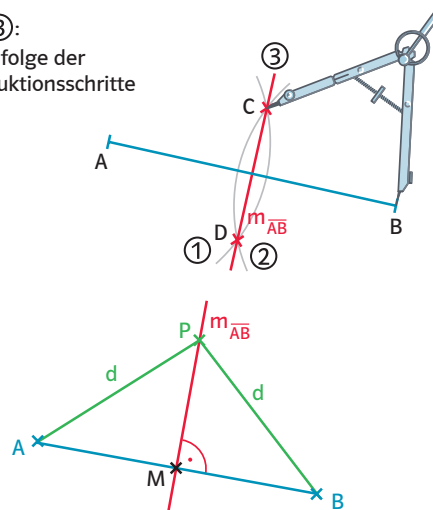


Fig. 2

Mittelsenkrechte

Eine Gerade heißt Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$ der Strecke \overline{AB} , wenn sie durch den Mittelpunkt der Strecke geht und zu ihr senkrecht ist.
Man bezeichnet sie deshalb als **Ortslinie**. Alle Punkte, die von zwei gegebenen Punkten A und B den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$.

Eine Ortslinie verbindet Punkte mit den gleichen Eigenschaften miteinander.

Beispiel Mittelsenkrechte mit Zirkel und Lineal konstruieren

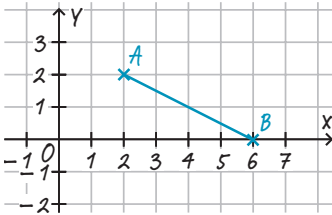
Zeichne die Punkte $A(2|2)$ und $B(6|0)$ in ein Koordinatensystem.

- a) Konstruiere die Mittelsenkrechte zu \overline{AB} . Beschreibe dein Vorgehen.
- b) Gib die Koordinaten von drei Punkten mit ganzzahligen Koordinaten an, die von A und B denselben Abstand haben.

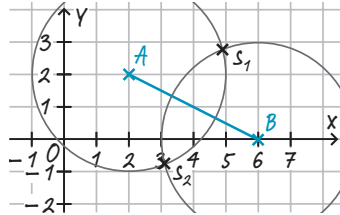
Lösung

a)

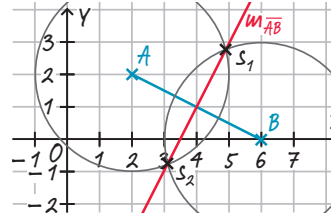
1. Zeichne die Strecke \overline{AB} in das Koordinatensystem ein.



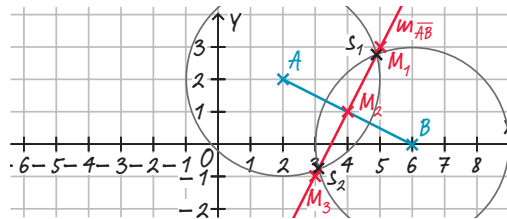
2. Zeichne um die Punkte A und B zwei sich schneidende Kreise, die denselben Radius haben, und markiere die Schnittpunkte S_1 und S_2 .



3. Zeichne eine Gerade $m_{\overline{AB}}$ durch die Punkte S_1 und S_2 . Diese ist die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AB} .

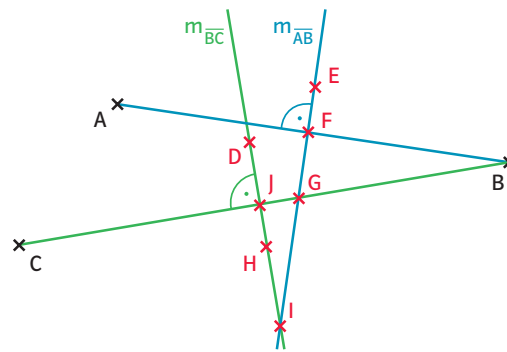


b) Alle Punkte auf der Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$ haben von den Punkten A und B denselben Abstand. Auf ihr liegen zum Beispiel die Punkte $M_1(5|3)$, $M_2(4|1)$, $M_3(3|-1)$ mit ganzzahligen Koordinaten.



Aufgaben

- 1 Gib für die Skizze die rot markierten Punkte an, die den gleichen Abstand zu den angegebenen Punkten haben.
 - a) A und B
 - b) B und C
- 2 Zeichne die Punkte A und B in ein Koordinatensystem. Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AB} mit Zirkel und Lineal.
 - a) $A(-2|3)$, $B(4|1)$
 - b) $A(-1|1)$, $B(4|-1)$
- 3 Zeichne die Punkte A und B in ein Koordinatensystem. Konstruiere mithilfe eines Zirkels die Mittelsenkrechte zur Strecke \overline{AB} und bestimme drei Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die von den Punkten A und B denselben Abstand haben.
 - a) $A(0|1)$, $B(6|1)$
 - b) $A(0|4)$, $B(4|0)$
 - c) $A(1|3)$, $B(5|1)$



Teste dich!

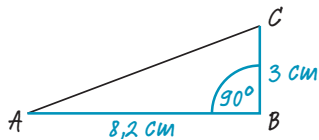
- 4 Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem und konstruiere die Mittelsenkrechte. Gib zwei Punkte mit ganzzahligen Koordinaten an, die zu P und Q denselben Abstand haben.
 - a) $P(-3|1)$, $Q(-1|5)$
 - b) $P(-4|4)$, $Q(-2|0)$

→ **Lösungen, Seite 261**

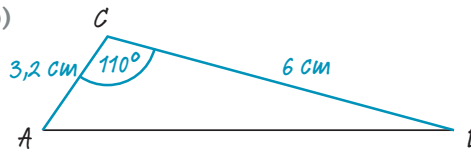
- 5 Mittelsenkrechten lassen sich auch in Dreiecken konstruieren.
 - Zeichne das Dreieck ABC mit den Eckpunkten A(1|7), B(1|1) und C(10|1) in ein Koordinatensystem. Konstruiere dann alle drei Mittelsenkrechten.
 - Gib die Koordinaten des Schnittpunktes S der drei Mittelsenkrechten an.

- 6 Konstruiere das in der Planfigur skizzierte Dreieck sowie die drei Mittelsenkrechten.

a)



b)

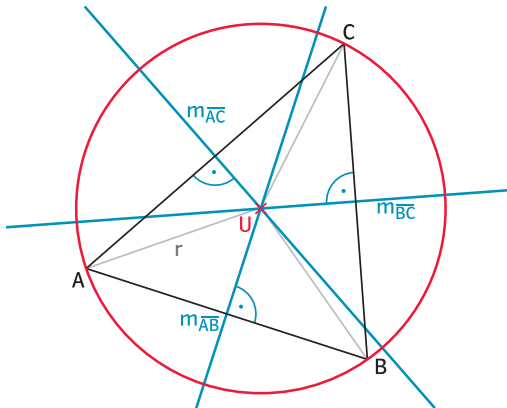


7 Umkreis eines Dreiecks

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks ist der Mittelpunkt U eines Kreises, auf dem alle Eckpunkte des Dreiecks liegen. Diesen Kreis bezeichnet man als Umkreis. Als Radius wird die Strecke vom Mittelpunkt zu einem Eckpunkt des Dreiecks gewählt.

Konstruiere den Umkreis des Dreiecks mit den gegebenen Eckpunkten.

- A(-1|2), B(3|4), C(-1|6)
- A(0|1), B(5|1), C(0|5)



- 8 Skizziere zunächst eine Planfigur. Konstruiere dann das Dreieck und seinen Umkreis. Miss den Umkreisradius.

a) $b = 6 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 48^\circ$

b) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $\gamma = 78^\circ$

c) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$

d) $a = 7 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$, $\beta = 62^\circ$

Teste dich!

→ Lösungen, Seite 262

- 9 Zeichne das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C in ein Koordinatensystem. Konstruiere zwei Mittelsenkrechten und bestimme den Mittelpunkt und den Radius des Umkreises.

a) A(-2|2), B(3|0), C(3|6) b) A(-2|2), B(4|4), C(0|4) c) A(3|1), B(7|4), C(0|5)

- 10 Mittelsenkrechten und Umkreise von Dreiecken lassen sich auch mithilfe dynamischer Geometriesoftware zeichnen. Konstruiere zu den Dreiecken aus Aufgabe 7 die Umkreise.

- 11 Nutze für die Zeichnung bzw. Untersuchung eine dynamische Geometriesoftware (DGS).
 - Zeichne eine Gerade g und zwei beliebige Punkte A und B. Konstruiere einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf g liegt und der durch die Punkte A und B verläuft.
 - Untersuche, wie die Gerade g und die Punkte A und B liegen müssen, sodass es keinen solchen Kreis gibt bzw. dass es unendlich viele solcher Kreise gibt.

Teste dein Grundwissen!

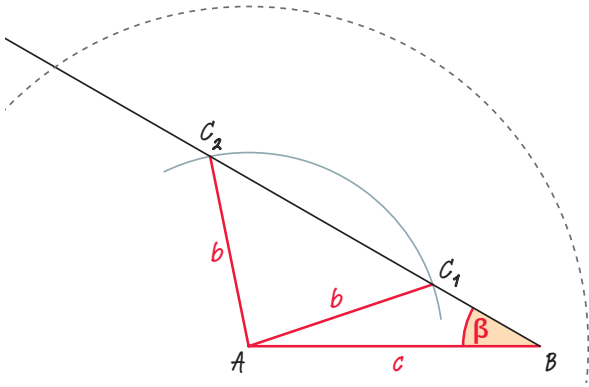
Mit Prozenten rechnen

→ Beispiel 3, Seite 47
Lösungen, Seite 262

- 12 Nach einer Preissenkung um 20% kostet ein Rucksack noch 60€.

a) Berechne den Preis vor der Preissenkung.

b) Berechne, um wie viel Prozent der Rucksack vor der Preissenkung teurer war als jetzt.

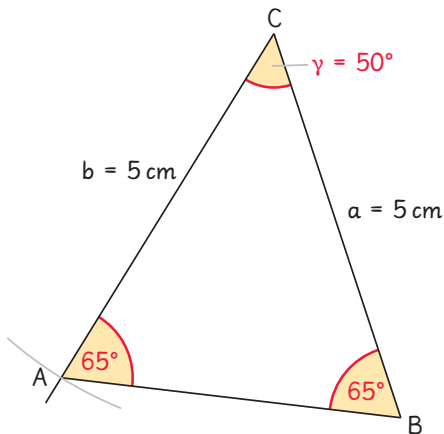


G 32

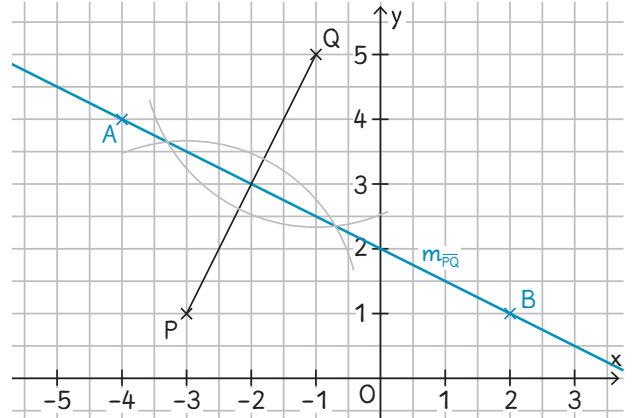
- a) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang. Die Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks sind mit jeweils 60° ebenso gleich groß. In einem gleichschenkeligen Dreieck sind zwei Seiten, die Schenkel, gleich lang. Die Innenwinkel, die den Schenkeln gegenüberliegen, sind gleich groß.
- b) Die beiden anderen Innenwinkel betragen:
 $\alpha = \beta = (180^\circ - 50^\circ) : 2 = 65^\circ$.

Konstruktionsschritte:

1. Zeichne $a = 5 \text{ cm}$.
2. Trage $\gamma = 50^\circ$ in C ab.
3. Trage $b = 5 \text{ cm}$ auf dem freien Schenkel von γ ab.
4. Verbinde A und B.

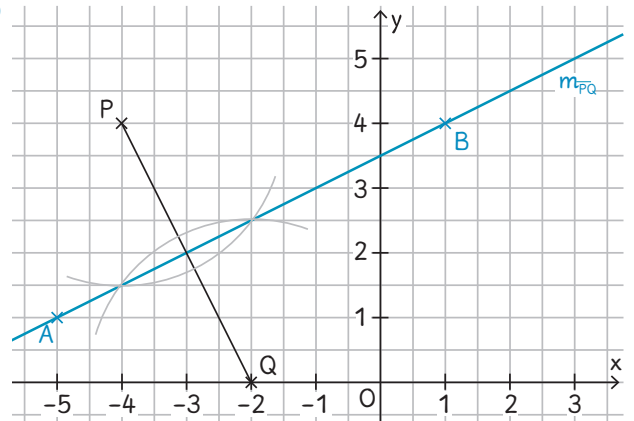


4
a)



Alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten liegen, haben den gleichen Abstand zu P und zu Q, z.B. A $(-4 | 4)$ oder B $(2 | 1)$.

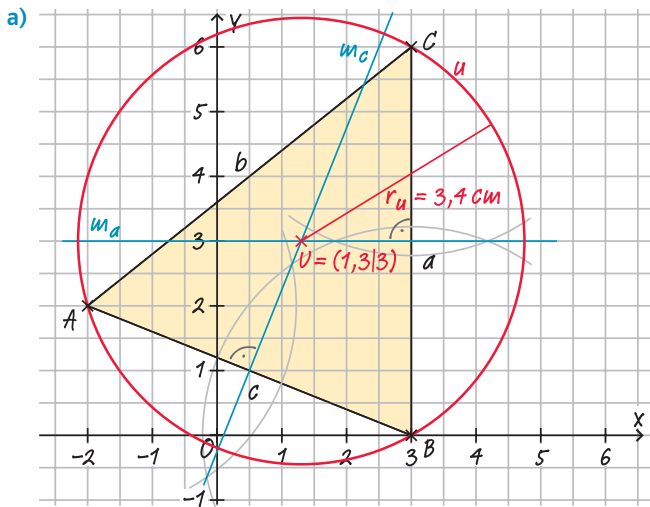
b)



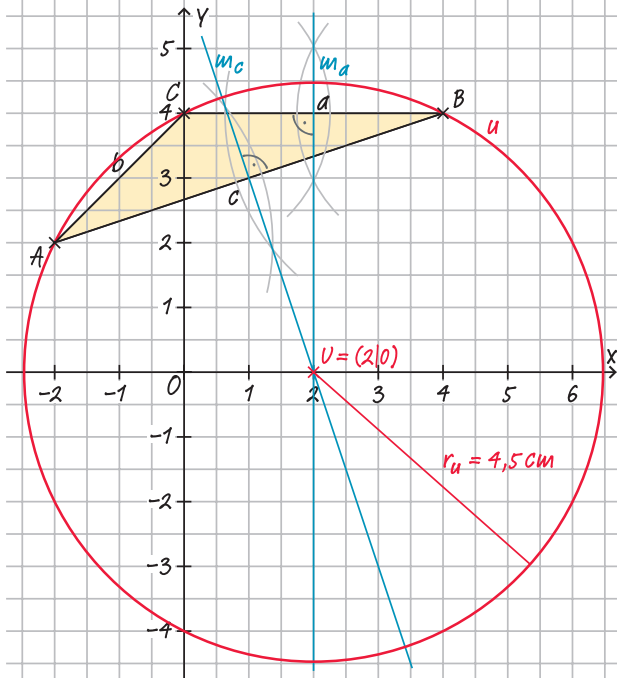
Alle Punkte, die auf der Mittelsenkrechten liegen, haben den gleichen Abstand zu P und zu Q, z.B. A $(-5 | 1)$ oder B $(1 | 4)$.

Seite 136

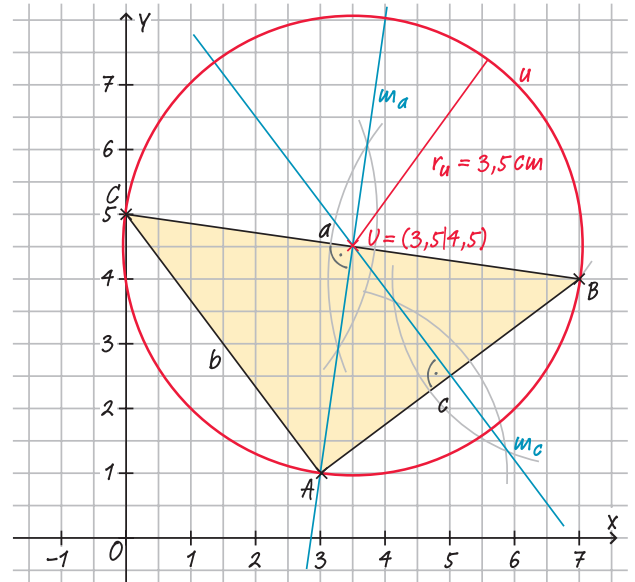
9



b)



c)

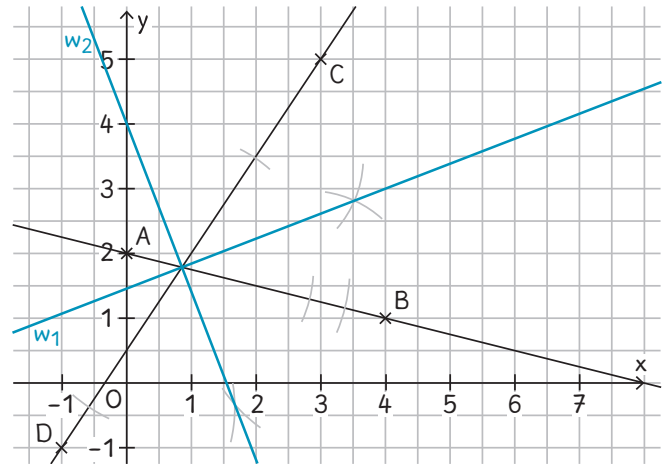


12

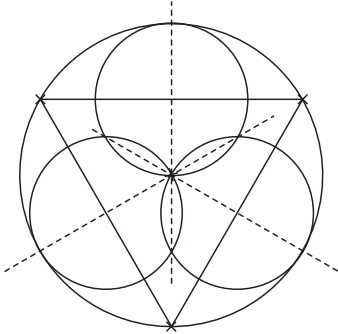
- a) Der Rucksack kostet noch 60 € , das sind 80% des ursprünglichen Preises. Gesucht ist der Grundwert G .
- $$G = \frac{W}{p} = \frac{60 \text{ €}}{0,8} = 75 \text{ €}$$
- Der Rucksack hat vorher 75 € gekostet.
- b) $\frac{75 \text{ €}}{60 \text{ €}} = 1,25 = 125\% = 100\% + 25\%$
Der Rucksack war vorher 25% teurer als jetzt.

Seite 138

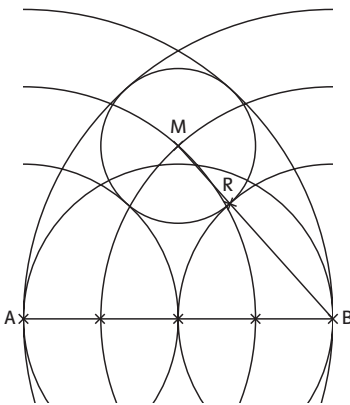
5



- c) 1. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck.
 2. Bestimme die Mittelpunkte der drei Seiten.
 3. Konstruiere die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks.
 4. Zeichne einen Kreis durch die Eckpunkte des Dreiecks.
 5. Bestimme die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten mit dem Kreis.
 6. Zeichne drei Kreise um die Mittelpunkte der Seiten durch die Schnittpunkte aus 5.
 Die Figur entsteht durch Nachzeichnen der zugehörigen Linien.

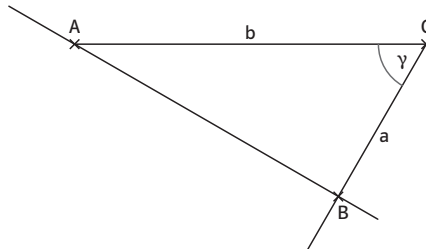


- d) 1. Zeichne eine Strecke \overline{AB} .
 2. Teile die Strecke \overline{AB} in vier gleich große Teile.
 3. Zeichne durch A Kreise durch die Teilpunkte sowie durch B.
 4. Zeichne durch B Kreise durch die Teilpunkte sowie durch A.
 5. Zeichne durch die Mitte der Strecke \overline{AB} einen Kreis durch A und B.
 6. M ist der Schnittpunkt der Kreise mit dem zweitgrößten Radius. Verbinde M mit B.
 7. R ist der Schnittpunkt der Strecke \overline{MB} mit dem Kreis um B, der durch die Mitte von \overline{AB} geht.
 8. Zeichne den Kreis um M mit dem Radius \overline{MR} .
 Die Figur entsteht durch Nachzeichnen der zugehörigen Linien.



31

- a) Die Seite c muss länger als 1 cm und kürzer als 9 cm sein.
 b) Der Winkel β muss größer als 0° und kleiner als 90° sein.
 c) Die Seite c muss mindestens 4,33 cm lang sein (Länge des Lots von A auf a, siehe Figur). Eine Höchstlänge gibt es nicht.

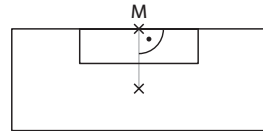


3 Mittelsenkrechte konstruieren

Seite 134

Einstiegsaufgabe

Zuerst bestimmt der Platzwart den Mittelpunkt der Torlinie. Dann geht er von dort aus 11 m senkrecht zur Torlinie ins Feld. Dort liegt der Elfmeterpunkt.



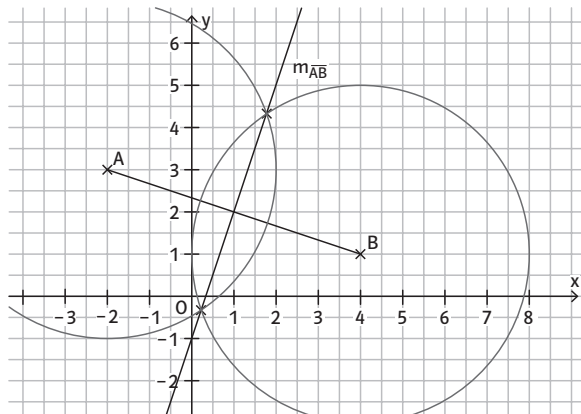
Seite 135

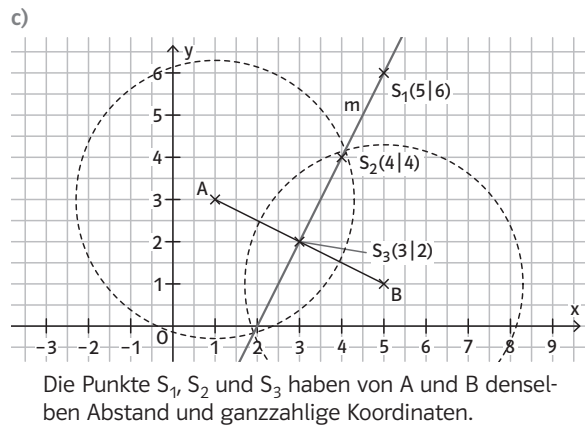
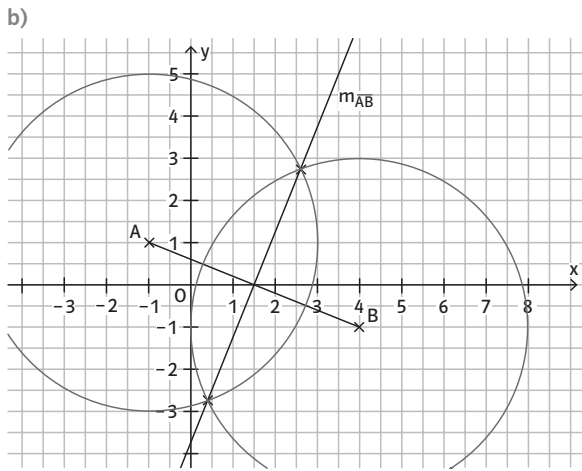
1

- a) Den gleichen Abstand zu A und B haben E, F, G und I.
 b) Den gleichen Abstand zu B und C haben D, J, H und I.

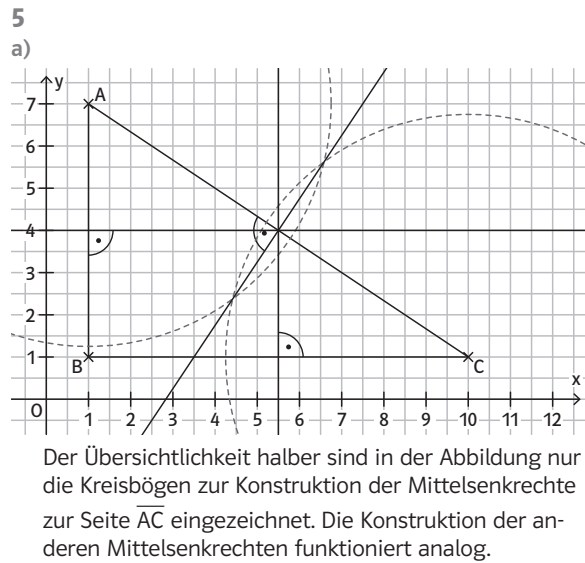
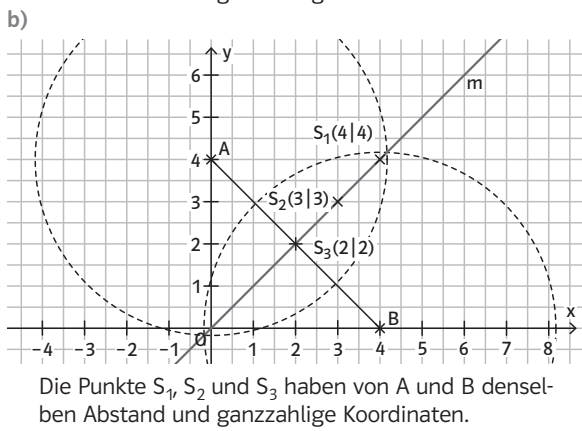
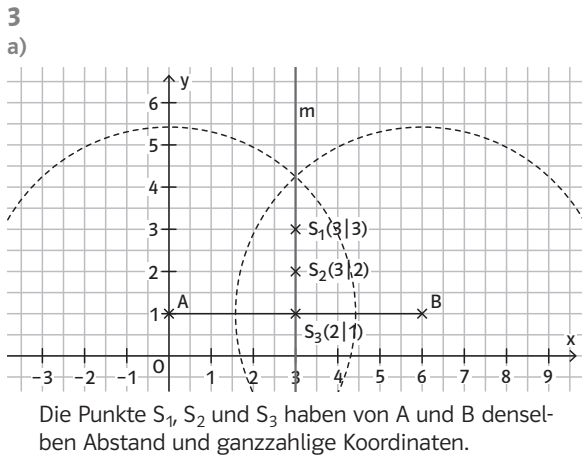
2

a)



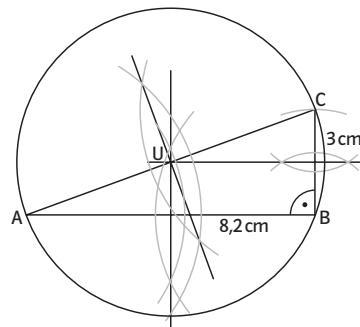


Seite 136

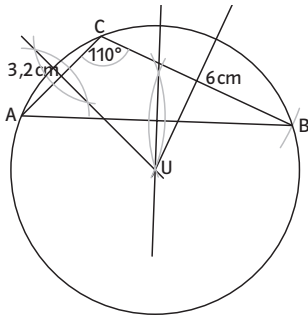


b) $S(5,5 | 4)$

6 a) $r = 4,4\text{cm}$

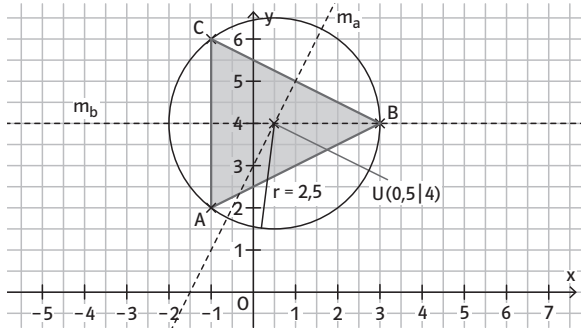


b) $r = 4,1\text{cm}$

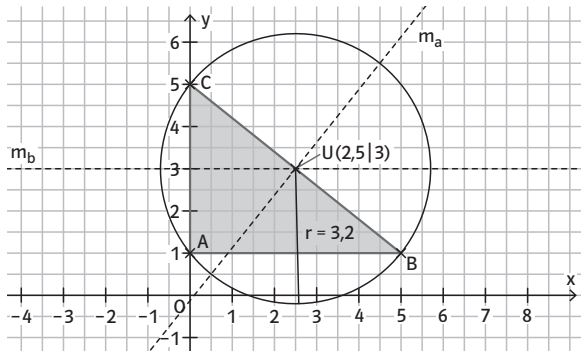


7

a)

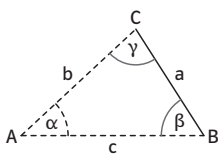


b)

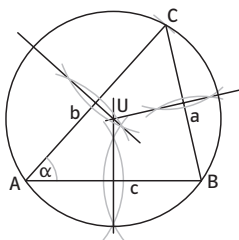


8

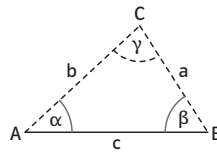
a) Planfigur:



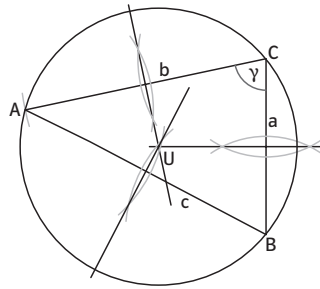
$r = 3,1\text{cm}$



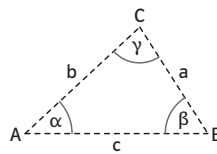
b) Planfigur:



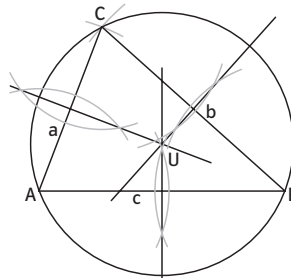
$r = 3,9\text{cm}$



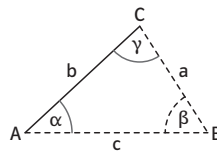
c) Planfigur:



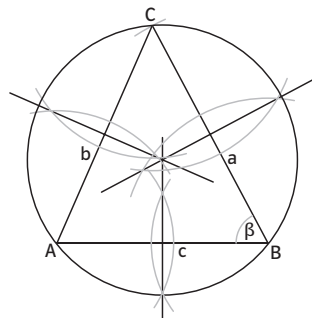
$r = 3,8\text{cm}$



d) Planfigur:



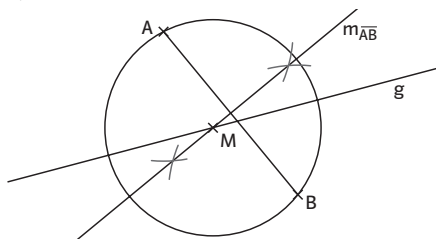
$r = 3,9\text{cm}$



10

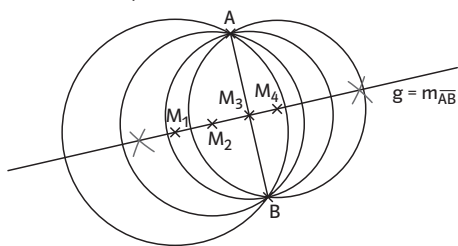
siehe Lösung zu Seite 136, Aufgabe 7

11
a)



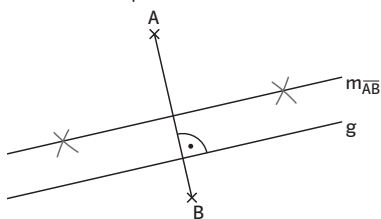
M ist der Schnittpunkt von der Geraden g und der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$.

b) Unendlich viele solcher Kreise gibt es, wenn $\overline{AB} \perp g$ und die Punkte A und B gleich weit von g entfernt sind, d.h. wenn $m_{\overline{AB}} = g$.
Zum Beispiel:



Keine solchen Kreise gibt es, wenn $\overline{AB} \perp g$ und die Punkte A und B nicht gleich weit von h entfernt sind. $m_{\overline{AB}}$ und g sind parallel und haben keinen Schnittpunkt.

Zum Beispiel:



4 Winkelhalbierende konstruieren

Seite 137

Einstiegsaufgabe

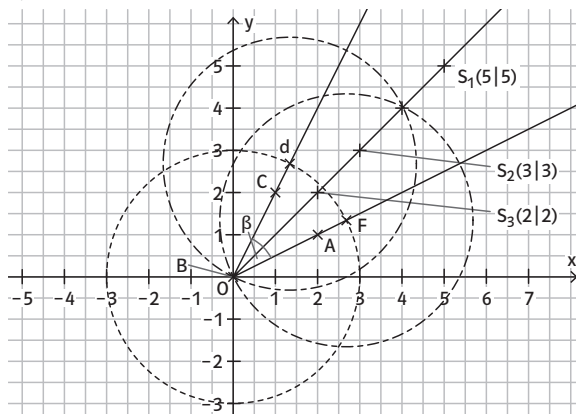
Das aufgefaltete Dreieck ist achsensymmetrisch und gleichschenkelig. Der Winkel am Punkt P ist durch die Knickkante genau in der Hälfte geteilt. Die obere Kante des entstandenen Dreiecks steht senkrecht auf der Knickkante.

Seite 138

1

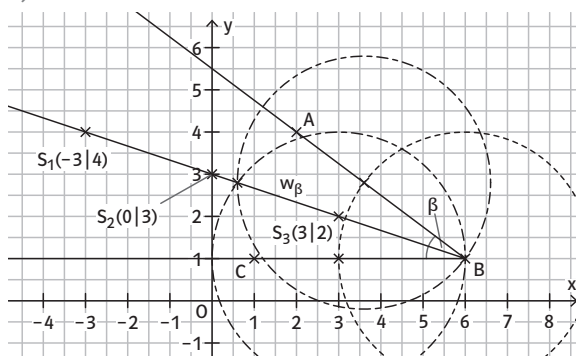
- a) nein b) ja

2
a)



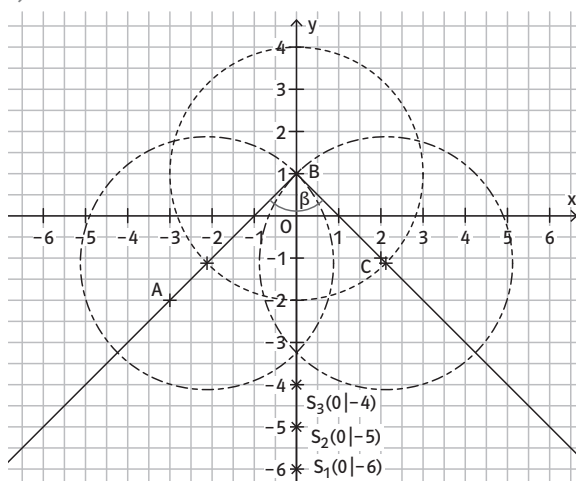
Die Punkte S_1, S_2 und S_3 liegen auf der Winkelhalbierenden und haben ganzzahlige Koordinaten.

b)



Die Punkte S_1, S_2 und S_3 liegen auf der Winkelhalbierenden und haben ganzzahlige Koordinaten.

c)



Die Punkte S_1, S_2 und S_3 liegen auf der Winkelhalbierenden und haben ganzzahlige Koordinaten.