3 Proportionale Zuordnungen

Frau Müller hat für sich und ihre Nachbarin beim Bio-Bauern Eier eingekauft. Die Nachbarin nimmt 4 Stück. Sind 2 € angemessen?

Aus 3 kg Äpfeln kann man etwa 2 l Apfelsaft pressen. Doppelt so viele Äpfel ergeben auch doppelt so viel Saft. Entsprechend erhält man bei der halben Menge an Äpfeln nur halb so viel Saft.

: 2 · 2 · 3 · 5 · 2

Masse der Äpfel (in kg)	1,5	**3**	6	9	15	30
Saftvolumen (in l)	1	**2**	4	6	10	20

: 2 · 2 · 3 · 5 · 2

Bei der Zuordnung *Apfelmasse (in kg) → Saftvolumen (in l)* ist der doppelten (halben, n-fachen) Masse an Äpfeln das doppelte (halbe, n-fache) Volumen an Saft zugeordnet. Zuordnungen mit dieser Eigenschaft nennt man **proportional**. Man sagt auch: Die Masse und das Saftvolumen sind zueinander proportional.

Dividiert man ein beliebiges Saftvolumen (in l) durch die zugehörige Apfelmasse (in kg), so erhält man stets denselben Wert:

$$\frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

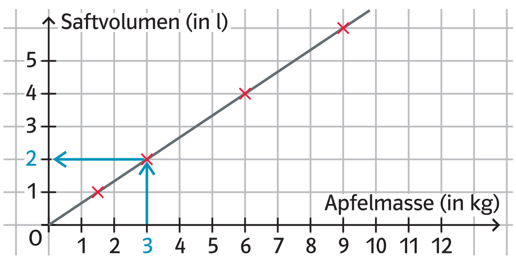
Man sagt, die Wertepaare einer proportionalen Zuordnung sind **quotientengleich**. Diesen Wert nennt man auch **Proportionalitätsfaktor** der Zuordnung. Umgekehrt kann man aus einer beliebigen Apfelmasse das entsprechende Saftvolumen berechnen:

$$\frac{2}{3} \cdot 60 = 40.$$

Aus 60 kg Äpfeln können 40 l Saft hergestellt werden.

Die **Zuordnungsvorschrift** $m \rightarrow V$ lautet: $V = \frac{2}{3} \cdot m$.

Zeichnet man den Graphen der Zuordnung, so stellt man fest, dass alle Punkte auf einer Gerade liegen.
Weil man jeder Apfelmasse ein Saftvolumen zuordnen kann, ist es sinnvoll, die Punkte zu verbinden. Da 0 kg Äpfel 0 l Saft liefern, verläuft die Gerade durch den Koordinatenursprung (**Ursprungsgerade**).



Wird der Ausgangswert erhöht (vermindert), erhöht (vermindert) sich auch der zugeordnete Wert.

Abbildungen: ShutterStock.com RF, New York (AlessandraRC), 1; ShutterStock.com RF, New York (Subbotina Anna), 2; Uwe Alfer, Kråksmåla, Alsterbro, 3

Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 7
ISBN: 978-3-12-733277-3

Proportionale Zuordnungen
Eine Zuordnung $x \rightarrow y$ heißt **proportional**, wenn dem Doppelten (der Hälfte, dem Dreifachen, …) eines x-Werts auch das Doppelte (die Hälfte, das Dreifache, …) des zugehörigen y-Werts zugeordnet wird.
Proportionale Zuordnungen sind **quotientengleich**, das heißt der Quotient $q = \frac{y}{x}$ ist für alle Wertepaare gleich. Er wird als **Proportionalitätsfaktor** der Zuordnung bezeichnet.
Wenn man den Proportionalitätsfaktor q kennt, kann man die Gleichung der proportionalen Zuordnung aufstellen: Sie lautet $\mathbf{y = q \cdot x}$.

Die Abkürzung q des Proportionalitätsfaktors steht für **Q**uotient.

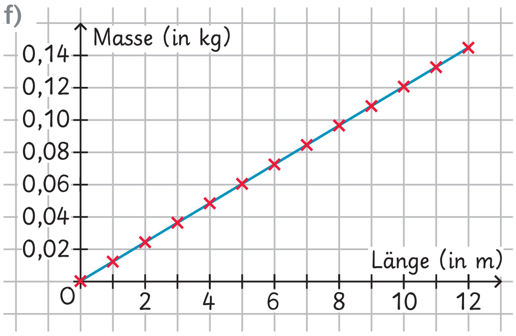
Beispiel 1 **Proportionale Zuordnungen darstellen**
100 m Draht wiegen 1,2 kg.
a) Begründe, dass die Zuordnung proportional ist.
b) Fertige eine Wertetabelle der Zuordnung *Drahtlänge x (in m) → Masse y (in kg)* für Drahtlängen von 0 m, 1 m, …, 5 m an.
c) Gib den Proportionalitätsfaktor an und stelle die Gleichung der Zuordnung auf.
d) Beschreibe die Bedeutung des Proportionalitätsfaktors im Sachzusammenhang.
e) Berechne die Masse von 130 m Draht.
f) Zeichne den Graphen der Zuordnung. Berücksichtige dabei Drahtlängen von bis zu 12 m.

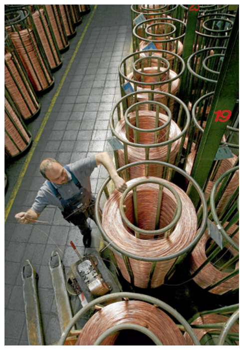
Lösung
a) Die Zuordnung ist proportional, denn ein doppelt so langer Draht wiegt auch doppelt so viel, ein halb so langer Draht wiegt halb so viel, ein dreimal so langer Draht wiegt dreimal so viel usw.

b)

Länge x (in m)	0	1	2	3	4	5
Masse y (in kg)	0	0,012	0,024	0,036	0,048	0,060

c) Der Proportionalitätsfaktor beträgt
$q = \frac{1{,}2}{100} = 0{,}012$.
Die Gleichung lautet $y = 0{,}012 \cdot x$.
d) Der Proportionalitätsfaktor gibt an, dass der Draht 0,012 kg pro m wiegt.
e) $0{,}012 \cdot 130 = 1{,}56$
130 m Draht wiegen 1,56 kg.

f)




Beispiel 2 **Dreisatz bei proportionalen Zuordnungen anwenden**
Am Kinotag zahlen alle Besucher denselben Ermäßigungspreis. Im Kino sind 450 der 600 Sitzplätze besetzt. An der Kasse wurden 1890 € eingenommen.
a) Begründe, dass die Zuordnung *Anzahl der Kinogäste → Einnahmen des Kinos (in €)* proportional ist.
b) Berechne, wie hoch die Einnahmen bei ausverkauftem Kino wären.

Lösung
a) Die Zuordnung ist proportional, weil alle denselben Preis bezahlen: Bei doppelt (dreimal, …) so vielen Kinogästen wird an der Kinokasse auch doppelt (dreimal, …) so viel eingenommen.
b) Die Berechnung erfolgt mit dem Dreisatz.
Es wären 2520 € eingenommen worden.

	Anzahl der Kinobesucher	Einnahmen (in €)	
: 450	450	1890	: 450
· 600	1	4,20	· 600
	600	2520	

Dreisatz bedeutet:
Aus drei gegebenen Größen kann eine vierte berechnet werden.

Abbildungen: PER Medien & Marketing GmbH, Braunschweig, 1; Picture-Alliance, Frankfurt/M. (dpa/Daniel Karmann), 2
Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 7
ISBN: 978-3-12-733277-3

Aufgaben

○ **1** Entscheide, ob die Zuordnung proportional ist. Begründe deine Antwort.
a) Bei Kopierpapier: *Anzahl der Blätter → Höhe des Stapels (in cm)*
b) Bei einem Menschen: *Alter (in Jahren) → Körpergewicht (in kg)*
c) Bei einem Quadrat: *Seitenlänge (in cm) → Umfang (in cm)*
d) Bei einem Quadrat: *Seitenlänge (in cm) → Flächeninhalt (in cm²)*

○ **2** Lara, Karl und Samy bewegen sich alle mit gleichbleibender Geschwindigkeit fort. Ordne Lara, Karl und Samy die passenden Wertepaare der Zuordnung *Zeit (in h) → zurückgelegte Strecke (in km)* zu.

Lara wandert mit $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Karl joggt mit $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Samy radelt mit $18\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

A (2 | 36)   B (0,5 | 9)   C (3 | 18)   D (1 | 10)   E (0,5 | 5)   F (2 | 12)

○ **3** In einem Rezept steht, dass man für 16 Schokomuffins 200 g Mehl braucht.
a) Fertige eine Wertetabelle der Zuordnung *Anzahl x der Muffins → Mehlmasse m (in g)* für 8, 12, 16, 20, 24, 28 und 32 Muffins an.
b) Notiere die Formel der Zuordnung und beschreibe die Bedeutung des Proportionalitätsfaktors im Sachzusammenhang.
c) Zeichne den Graphen der Zuordnung. Wähle auf den Achsen 1 cm für 4 Muffins bzw. 50 g Mehl.

○ **4** In der Wertetabelle ist eine proportionale Zuordnung dargestellt. Übertrage die Tabelle ins Heft. Ergänze die fehlenden Werte und gib ein passendes Beispiel einer Zuordnung an.

a)

	h	km	
□	3	210	□
□	1	□	□
	8	□	

b)

	g	Anzahl	
:5	250	3,50	□
□	□	□	□
	600	□	

c)

	min	m	
□	240	150	□
□	16	□	□
	48	□	

○ **5** Entscheide und begründe, ob die Wertetabelle eine proportionale Zuordnung darstellt.

a)

x-Wert	1	2	3	4	5	6	7
y-Wert	7	14	21	28	35	42	49

b)

x-Wert	0,25	0,5	1	2,5	3	3,5
y-Wert	3	6	12	30	36	45

c)

x-Wert	3	6	12	36	45	72	96
y-Wert	0,5	1	2	6	7,5	14	16

d)

x-Wert	1,2	3,6	9,6	14,4	18	30
y-Wert	0,3	0,9	2,4	3,6	4,5	7,5

○ **6** Die Tabelle gehört zu einer proportionalen Zuordnung. Übertrage die Tabelle in dein Heft und fülle die Lücken aus.

a)

x-Wert	0	1	2	3	5	7
y-Wert				6		

b)

x-Wert	3	6		12		
y-Wert	7		21		35	70

Abbildungen: Thinkstock, München (iStock/Azurita)

Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 7
ISBN: 978-3-12-733277-3

Seite 17

9

8 Bauklötze bilden den Boden des Turms. Jede Etage besteht aus 4 Bauklötzen, mit $4 \cdot x$ berechnet man also, wie viele Bauklötze man für x Etagen braucht. Addiert man die Anzahl der benötigten Bauklötze für den Boden und x Etagen, erhält man die gegebene Gleichung $y = 8 + 4 \cdot x$.

10

a) Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat den Umfang $2 \cdot a + 2 \cdot b$. Für den Umfang u erhält man die Gleichung $u = 2 \cdot x + 2 \cdot 5 = 10 + 2 \cdot x$.

b) Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat den Flächeninhalt $a \cdot b$. Für den Flächeninhalt A erhält man die Gleichung $A = 3 \cdot x$.

c) Für das Volumen des Würfels gilt: $V = x \cdot x \cdot x = x^3$.

12

$9\,\frac{km}{h} = 150\,\frac{m}{min}$, $17\,\frac{km}{h} = 283\frac{1}{3}\,\frac{m}{min}$

Zeit seit Franzis Start (in min)	0	1	2	3	4	5	6
Janas Strecke (in m)	750	900	1050	1200	1350	1500	1650
Franzis Strecke (in m)	0	$283\frac{1}{3}$	$566\frac{2}{3}$	850	$1133\frac{1}{3}$	$1416\frac{2}{3}$	1700

Franzi holt Jana nach etwas mehr als 5 Minuten ein.

13

a) Dem x-Wert 5 wird der y-Wert 22 zugeordnet.

b) $y = 7 + x + x + 5$

c) Dem x-Wert 8 wird der y-Wert 28 zugeordnet. Begründung: Der y-Wert ist immer um 12 größer als das Doppelte des x-Werts. Das Doppelte des x-Werts muss also 16 sein. Der x-Wert ist daher 8.

d) individuelle Lösung

3 Proportionale Zuordnungen

Seite 18

Einstiegsaufgabe

Da 12 Eier 7,20 € gekostet haben, kostet ein Ei 7,20 € : 12 = 0,60 €. Somit kosten 4 Eier $4 \cdot 0{,}60$ € = 2,40 €. Die Nachbarin müsste Frau Müller 0,40 € mehr, also insgesamt 2,40 € geben.

Seite 20

1

a) Da jedes Blatt die gleiche Dicke besitzt, ist die Zuordnung *Anzahl der Blätter ⟶ Höhe des Stapels proportional.*

b) Die Zuordnung *Alter eines Menschen ⟶ Körpergewicht* ist nicht proportional. Mit 40 ist man beispielsweise nicht doppelt so schwer wie mit 20.

c) und d) Ein Quadrat mit doppelt so großer Kantenlänge hat einen doppelt so großen Umfang und einen viermal so großen Flächeninhalt. Die Zuordnung *Seitenlänge eines Quadrats ⟶ Umfang eines Quadrats* ist proportional, die Zuordnung *Seitenlänge eines Quadrats ⟶ Flächeninhalt eines Quadrats* ist dagegen nicht proportional.

2

Lara: C, F   Karl: D, E   Samy: A, B

3

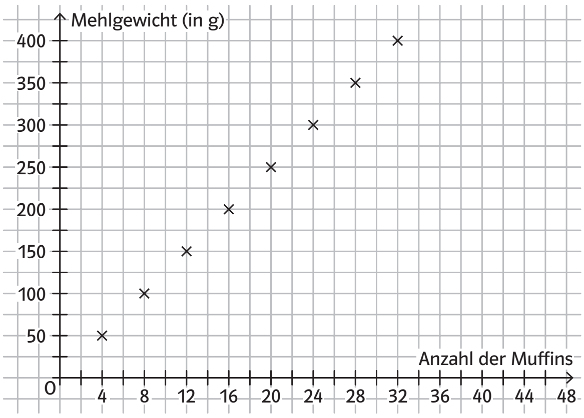
a)

Anzahl x der Muffins	8	12	16	20	24	28	32
Mehlgewicht m (in g)	100	150	200	250	300	350	400

b) $m = 12{,}5 \cdot x$

Der Proportionalitätsfaktor 12,5 gibt das Mehlgewicht (in g) pro Muffin an.

c)



4

a)

	h	km	
: 3	3	210	: 3
· 8	1	**70**	· 8
	8	**560**	

Beispiel für eine mögliche Zuordnung: *Dauer einer Autofahrt bei konstanter Geschwindigkeit von 70 km/h (in h) ⟶ zurückgelegte Strecke (in km)*

b)

	g	Anzahl	
: 5	250	3,50	: 5
· 12	**50**	**0,70**	· 12
	600	**8,40**	

Beispiel für eine mögliche Zuordnung: *Mehl (in kg) ⟶ Anzahl der Brötchen*

c)

	min	m	
: 15	240	150	: 15
· 3	16	**10**	· 3
	48	**30**	

Beispiel für eine mögliche Zuordnung: *Wartezeit in einer Warteschlange (in min) ⟶ zurückgelegte Strecke in der Warteschlange (in m)*

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 7 Lösungen
ISBN: 978-3-12-733278-0

5

a) Ja, der y-Wert ist das 7-Fache des x-Wertes. Der Proportionalitätsfaktor ist also 7.
b) Nein, denn 45 ist nicht das 12-Fache von 3,5.
c) Nein, denn 14 ist nicht $\frac{1}{6}$ von 72.
d) Ja, der x-Wert ist das 4-Fache des y-Wertes. Der Proportionalitätsfaktor ist also $\frac{1}{4}$.

6

a)

x	0	1	2	3	5	7
y	0	2	4	6	10	14

b)

x	3	6	9	12	15	30
y	7	14	21	28	35	70

Seite 21

7

a) Die Zuordnung ist proportional, weil man bei doppelt (dreimal, viermal) so vielen Kirschen auch doppelt (dreimal, viermal) so viel Gelierzucker braucht.

b)

Gewicht der Kirschen (in g)	Gewicht des Gelierzuckers (in g)
300 : 2 150 · 5 750	210 : 2 105 · 5 525

Für 750 g Kirschen benötigt man 525 g Gelierzucker.

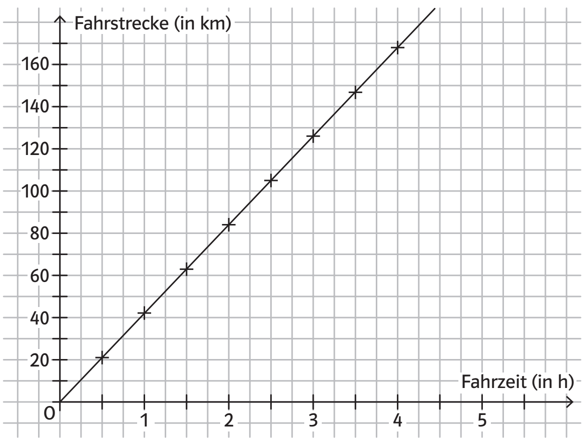
10

a)

Fahrzeit t (in h)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Fahrstrecke s (in km)	21	42	63	84	105	126	147	168

b) $s = 42 \cdot t$
Der Proportionalitätsfaktor gibt an, wie viele km der Fahrradfahrer pro Stunde zurücklegt, also sein Tempo in km/h.

c)

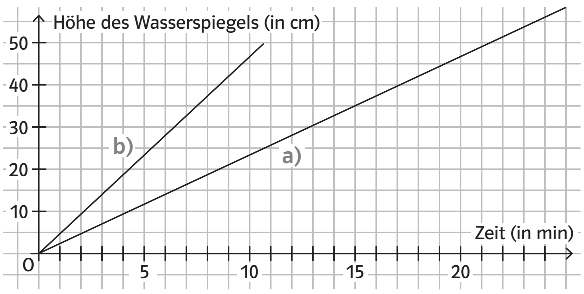


d) Am Graphen kann man ablesen, dass er ca. 2,1 h für 89 km brauchen sollte.
Kontrolle: $42 \cdot 2{,}1 = 88{,}2$. Die abgelesene Fahrzeit ist etwas zu kurz, aber ein guter Näherungswert.

e) Der Trainingsplan ist nur dann realistisch, wenn der Radrennfahrer mit gleichbleibender Geschwindigkeit fährt. Sollte er zwischendurch anhalten, wegen eines Anstiegs oder Gefälles langsamer oder schneller fahren, oder das Tempo auf langer Strecke nicht halten können, ist die Zuordnung nicht proportional und der Trainingsplan somit nicht mehr realistisch. Wenn es sich nur um geringere Abweichungen handelt (z. B. nur kurze Pausen, keine größeren Steigungen) ist die Zuordnung zur näherungsweisen Beschreibung des Zusammenhangs trotzdem geeignet.

11

a)



$h = \frac{7}{3} \cdot t$

b) Das Wasser steigt doppelt so schnell an. Das erkennt man am Graphen daran, dass der Graph doppelt so steil verläuft.

12

Die Zuordnung *Wasserstand (in cm) → Volumen des Wassers (in l)* ist für das erste und das dritte Gefäß proportional, weil diese Gefäße auf jeder Höhe dieselbe Querschnittsfläche haben, also nach oben weder breiter noch schmaler werden.
Das zweite Gefäß ist auf mittlerer Höhe deutlich breiter als unten und oben, sodass die Zuordnung *Wasserstand (in cm) → Volumen des Wassers (in l)* bei diesem Gefäß nicht proportional ist.

13

a) 21 cm − 13,5 cm = 7,5 cm

Brenndauer der Kerze (in h)	Längenverlust der Kerze (in cm)
3 : 3 1 · 2 2	7,5 : 3 2,5 · 2 5

21 cm + 5 cm = 26 cm
Die Kerze war ursprünglich 26 cm lang.

b) $1\,l = 1\,dm^3 = 1000\,cm^3$

Menge an Saft (in cm³)	Menge an Möhren (in g)
25 · 40 1000	100 · 40 4000

Zur Herstellung von 1 l Saft benötigt man 4 kg Möhren.

Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Lambacher Schweizer Thüringen Mathematik 7 Lösungen
ISBN: 978-3-12-733278-0