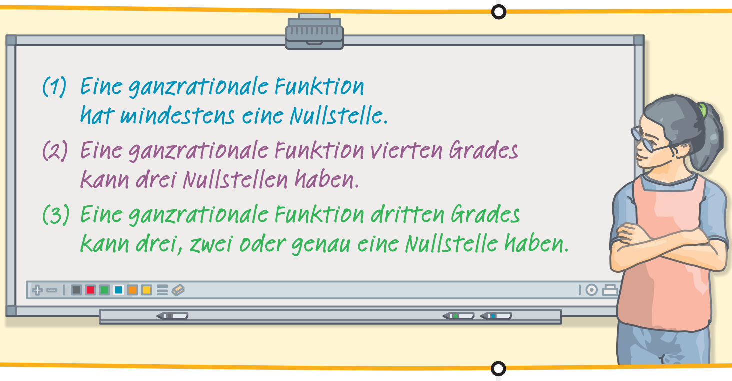
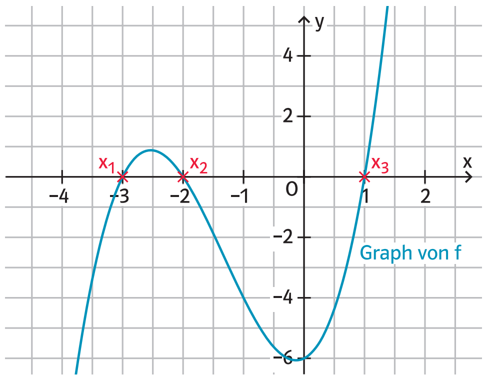
# Linearfaktordarstellung und mehrfache Nullstellen




Beurteilen Sie, ob die Aussagen auf der Tafel wahr oder falsch sind.

**Linearfaktoren** sind ganzrationale Funktionen vom Grad eins, z. B. $(x-1)$ oder $(x+4)$. Ist der Funktionsterm einer Funktion als Produkt von Linearfaktoren angegeben, wie z. B. die Funktion f mit $f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$, so kann man mithilfe des Satzes vom Nullprodukt die Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 1$ ohne Rechnung ablesen.
Multipliziert man den Term von f aus, so ergibt sich $f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$
$= x^3 + 4x^2 + x - 6$
mit $x^3$ als höchster x-Potenz.




Allgemein gilt: Besteht ein Term aus n Linearfaktoren, dann ist in der ausmultiplizierten Form $x^n$ die höchste vorkommende x-Potenz. Somit hat eine ganzrationale Funktion f der Art $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ den Grad n. Sie hat höchstens n Nullstellen. Sind die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alle voneinander verschieden, so hat die Funktion genau n Nullstellen.

Hat die ganzrationale Funktion f (mindestens) eine Nullstelle, so gilt folgender Satz:

**Satz 1:** Es sei f eine ganzrationale Funktion vom Grad n und b eine Nullstelle von f.
Dann gibt es eine ganzrationale Funktion g vom Grad $n - 1$, sodass $f(x) = (x - b) \cdot g(x)$ ist.

Beweis:
Man verschiebt den Graphen von f um b nach links. Die zugehörige Funktion ist also die Funktion h mit $h(x) = f(x + b)$.
Die Stelle $x_0 = 0$ ist eine Nullstelle von h, denn es gilt $h(0) = f(0 + b) = f(b) = 0$. Daher kann man im Term von $h(x)$ den Faktor x ausklammern: $h(x) = x \cdot k(x)$. Die Funktion k ist ganzrational und hat den Grad $n - 1$.
Verschiebt man den Graphen von h um b nach rechts, so ergibt sich der Graph der Funktion f mit $f(x) = h(x - b) = (x - b) \cdot k(x - b) = (x - b) \cdot g(x)$ und $g(x) = k(x - b)$.
Die Funktionen k und g haben denselben Grad: $n - 1$.

Wendet man diesen Satz wiederholt an, so folgt:

**Satz 2:** Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.





**Autor:** Rüdiger Sandmann

**Seite zu:** Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Aus Klasse 10 weiß man, dass für eine ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad n gilt:

- $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und
  $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ oder
- $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ und
  $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ (vgl. Fig. 1).

Aufgrund dieses Verhaltens muss eine ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad n mindestens eine Nullstelle besitzen.

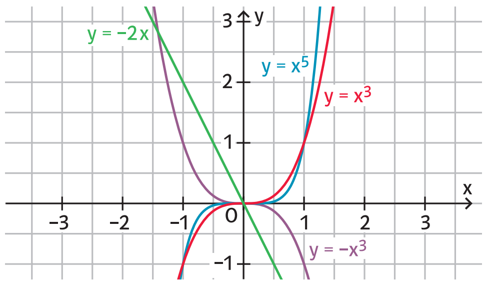
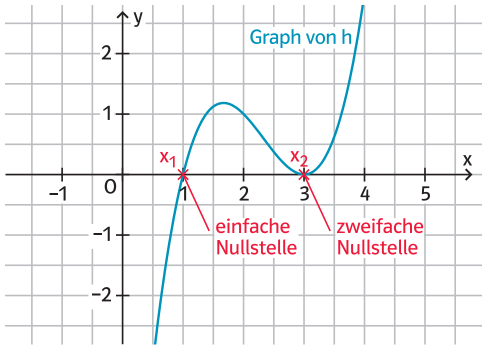



Fig. 1

**Satz 3:** Eine ganzrationale Funktion f mit ungeradem Grad n hat mindestens eine Nullstelle.

**Mehrfache Nullstellen**

Die Funktion h mit
$h(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 3) = (x - 1) \cdot (x - 3)^2$
hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.
Da der Linearfaktor $(x - 3)$ im Funktionsterm zweimal vorkommt, heißt $x_2 = 3$ **doppelte Nullstelle**.




Der Graph von h zeigt bei der doppelten Nullstelle $x_2 = 3$ eine Besonderheit: Er hat an dieser Stelle einen Extrempunkt.

Begründung:
In der Nähe der Stelle $x_2 = 3$ gilt $x - 1 \approx 2$, also $h(x) \approx 2 \cdot (x - 3)^2$. Der Graph von f verläuft in der Nähe der Stelle $x_2 = 3$ wie eine nach oben geöffnete Parabel. Die Funktion f hat also keinen VZW an der Stelle $x_2 = 3$. Der Graph von f muss an dieser Stelle einen Tiefpunkt haben.

In der Nähe der Stelle $x_1 = 1$, also für $x \approx 1$, gilt hingegen $(x - 3)^2 \approx 4$ und somit $h(x) \approx 4 \cdot (x - 1)$. Der Graph von f verläuft in der Nähe der Stelle $x_1 = 1$ wie der Graph von h, also wie eine Gerade mit der Steigung 4. Die Funktion f hat daher einen VZW an der Stelle $x_1 = 1$.

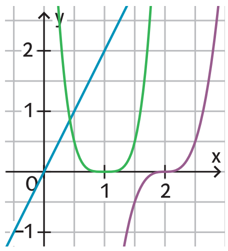
In einem Funktionsterm kann ein Linearfaktor mehr als zweimal auftreten. Zum Beispiel tritt bei der Funktion f mit $f(x) = (x - 2)^3$ der Linearfaktor $(x - 2)$ dreimal auf. Die Nullstelle $x = 2$ heißt **dreifache Nullstelle.**

Allgemein definiert man:
a ist eine **n-fache Nullstelle** einer Funktion f, wenn $f(x) = (x - a)^n \cdot g(x)$ mit $g(a) \neq 0$ gilt.

Man kann zeigen, dass eine n-fache Nullstelle der Funktion eine (n − 1)-fache Nullstelle der Ableitung ist (vgl. Aufgabe 13). Somit folgt:

**Satz 4:** Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f in Linearfaktordarstellung:
$f(x) = (x - a)^n \cdot g(x)$ mit $g(a) \neq 0$.
Dann gilt:

- Für $n = 1$ schneidet der Graph von f an der Stelle $x = a$ die x-Achse.
- Ist n gerade, so hat der Graph von f an der Stelle $x = a$ einen Extrempunkt.
- Ist n ungerade $(n \neq 1)$, so hat der Graph von f an der Stelle $x = a$ einen Sattelpunkt.





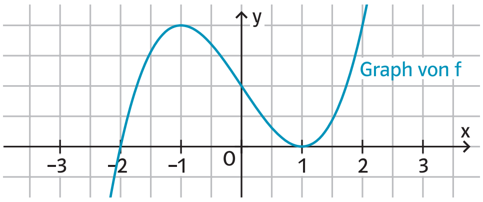


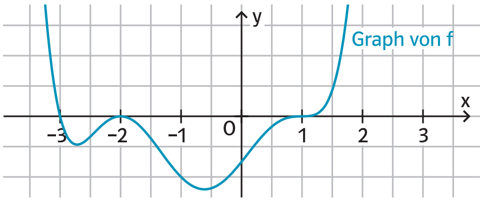

Autor: Rüdiger Sandmann

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

**Beispiel 1** **Aus dem Graphen einen Funktionsterm bestimmen**

Bestimmen Sie zu den Vorgaben des Graphen eine Funktion möglichst niedrigen Grades.




**Lösung**

**a)** Man erkennt am Graphen von f, dass die Funktion an der Stelle $x_1 = -2$ eine einfache und an der Stelle $x_2 = 1$ eine doppelte Nullstelle hat. Möglicher Funktionsterm: $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$.

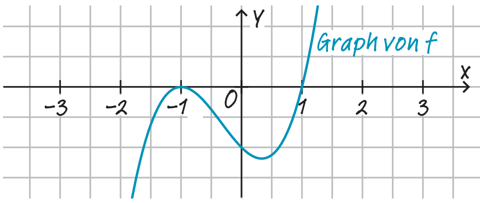
**b)** Am Graphen erkennt man: f hat an der Stelle $x_1 = -3$ eine einfache Nullstelle, an der Stelle $x_2 = -2$ eine Nullstelle gerader Ordnung, z. B. eine doppelte, und an der Stelle $x_3 = 1$ eine Nullstelle ungerader Ordnung, z. B. eine dreifache. Möglicher Funktionsterm: $f(x) = (x + 3)(x + 2)^2(x - 1)^3$.

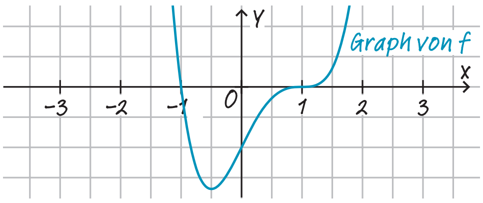
**Beispiel 2** **Den Graphen einer ganzrationalen Funktion skizzieren**

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

**a)** $f(x) = (x - 1)(x + 1)^2$ **b)** $f(x) = (x + 1)(x - 1)^3$

**Lösung**




## Aufgaben

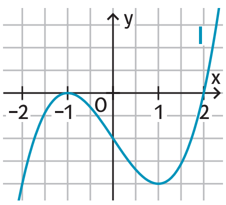
○ **1** Geben Sie an, welche Funktionen genau die drei Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 4$ haben.

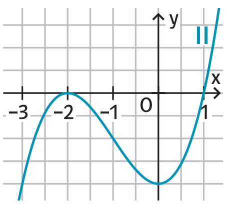
$f(x) = (x + 2)(x - 4)$ $g(x) = x(x - 2)(x + 4)$ $h(x) = x(x + 2)(x - 4)$

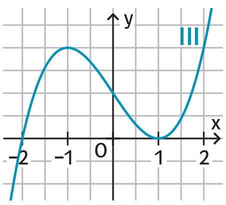
$i(x) = x(x + 2)^2(x - 4)^3$ $j(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$ $k(x) = (x - 2)x^4(x + 4)^3$

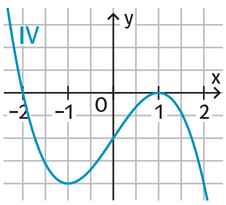
○ **2** Ordnen Sie jeder Funktion den passenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ $g(x) = (x + 1)^2(x - 2)$ $h(x) = -(x - 1)^2(x + 2)$ $i(x) = (x - 1)(x + 2)^2$



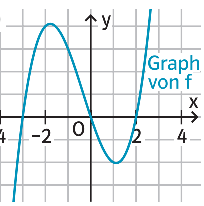



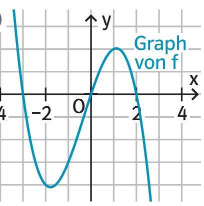




○ **3** Die Abbildung zeigt den Ausschnitt des Graphen einer ganzrationalen Funktion mit sämtlichen Nullstellen. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm möglichst niedrigen Grades an.

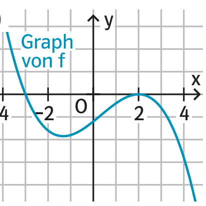
**a)**



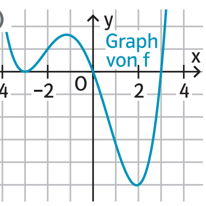

**b)**




**c)**




**d)**







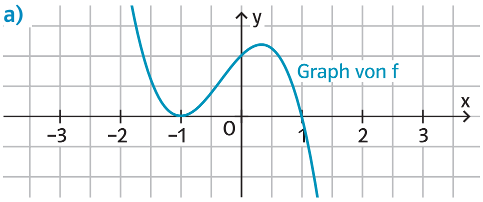

**Autor:** Rüdiger Sandmann

**Seite zu:** Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

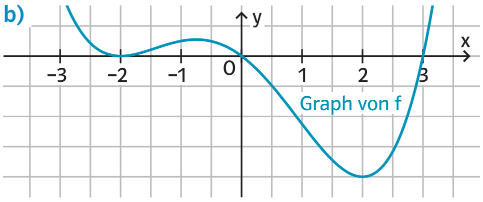
**Test**

**4** Die Abbildung zeigt den Ausschnitt des Graphen einer ganzrationalen Funktion mit sämtlichen Nullstellen. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm möglichst niedrigen Grades an

**a)**




**b)**




**5** Geben Sie einen Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion f möglichst niedrigen Grades an, für die bzw. für deren Graphen gilt:

**a)** Der Graph hat an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ eine Schnittstelle mit der x-Achse und einen Tiefpunkt $T(-1\,|\,0)$. Begründen Sie, dass wirklich ein Tiefpunkt vorliegt.

**b)** Die Funktion f hat bei $x_1 = -2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, der Graph berührt die x-Achse in $N_3(2\,|\,0)$ und verläuft durch $S(0\,|\,-8)$.

**c)** Der Graph hat einen Sattelpunkt $S(3\,|\,0)$ und einen Tiefpunkt $T(-1\,|\,0)$ und schneidet die y-Achse bei $P(0\,|\,27)$. Begründen Sie, dass wirklich ein Tiefpunkt vorliegt.

**6** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a(x - b)(x - c)$. Bestimmen Sie a, b und c so, dass

**a)** f die Nullstellen $-2$ und 1 hat und der Graph von f durch den Punkt $P(0\,|\,4)$ verläuft,

**b)** der Graph von f bei $T(2\,|\,0)$ einen Tiefpunkt hat und durch $P(0\,|\,2)$ verläuft.

**7** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^5 - x^3$. Geben Sie die Nullstellen von f an und skizzieren Sie grob den möglichen Graphen der Funktion.

**8** Gegeben ist die Funktion $f_a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von $f_a$ in Abhängigkeit von a und geben Sie diese an.

**a)** $f_a(x) = (x^2 + a)(x - 2)$ **b)** $f_a(x) = x^4 - a x^2$ **c)** $f_a(x) = (x + a)(x - a)$

**d)** $f_a(x) = x^4 + 4x^2 - a$ **e)** $f_a(x) = x^6 + (a - 1)x^4 - a x^2$ **f)** $f_a(x) = x^n + a$

**Test**

**9** Die Funktion $f_a$ hat die einfachen Nullstellen $x_1 = a$ und $x_2 = a - 1$ sowie die doppelte Nullstelle $x_3 = 2a$.
Geben Sie einen möglichen Term der Funktion $f_a$ an. Welche Werte kann a nicht annehmen?
Geben Sie $f_1$ an.

**10** Wie viele verschiedene Nullstellen kann eine Funktion f vom Grad vier haben? Geben Sie Beispiele an. Begründen Sie, dass f nicht mehr als vier Nullstellen haben kann.

**11** Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f und g. Es gilt $g(a) \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.
Betrachtet wird die Funktion $f_a$ mit $f_a(x) = g(x) \cdot (x - a)^2$. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass der Graph von $f_a$ an der Stelle $x = a$ eine Extremstelle hat.

**12** Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f. Begründen Sie folgenden Satz.

**a)** Der Graph der Funktion f berührt an einer mehrfachen Nullstelle von f die x-Achse.

**b)** Eine dreifache Nullstelle der Funktion f ist gleichzeitig eine Wendestelle von f.

**13** Zeigen Sie, dass eine n-fache Nullstelle einer Funktion eine (n – 1)-fache Nullstelle der Ableitung der Funktion ist. Begründen Sie damit Satz 4 von Seite 2.





Autor: Rüdiger Sandmann

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

## Lösungen

**Einstiegsaufgabe**

(1) Falsch. Gegenbeispiel: f mit $f(x) = x^2 + 1$.

(2) Wahr. Beispiel: f mit $f(x) = x^4 - x^2$.

(3) Wahr. Beispiele: Drei Nullstellen: f mit $f(x) = x(x-1)(x+1)$.
Zwei Nullstellen: f mit $f(x) = (x-1)(x+2)^2$.
Eine Nullstelle: f mit $f(x) = x^3$.

**1**

Die Funktionen h und i haben die drei angegebenen Nullstellen.

**2**

f gehört zu III. Begründung: f hat eine doppelte Nullstelle bei 1 und eine einfache Nullstelle bei −2.
Wegen des Verhaltens für $x \to \pm\infty$ gehört f zu III und nicht zu IV.
g gehört zu I. Begründung: g hat eine doppelte Nullstelle bei −1 und eine einfache Nullstelle bei 2.
h gehört zu IV. Begründung: h hat eine doppelte Nullstelle bei 1 und eine einfache Nullstelle bei −2.
Wegen des Verhaltens für $x \to \pm\infty$ gehört h zu IV und nicht zu III.
i gehört zu II. Begründung: h hat eine einfache Nullstelle bei 1 und eine doppelte Nullstelle bei −2.

**3**

**a)** Die Funktion hat einfache Nullstellen bei −3, 0 und 2. Es gilt $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Möglicher Funktionsterm: $f(x) = (x+3)\,x\,(x-2)$.

**b)** Die Funktion hat einfache Nullstellen bei −3, 0 und 2. Es gilt $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$. Möglicher Funktionsterm: $f(x) = -(x+3)\,x\,(x-2)$.

**c)** Die Funktion hat eine einfache Nullstelle bei −3 und eine Nullstelle gerader Ordnung, z. B. eine doppelte, bei 2. Es gilt $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$. Möglicher Funktionsterm: $f(x) = -(x+3)(x-2)^2$.

**d)** Die Funktion hat einfache Nullstellen bei 0 und 3 und eine Nullstelle gerader Ordnung, z. B. eine doppelte, bei −3. Es gilt $f(x) \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$. Möglicher Funktionsterm: $f(x) = (x+3)^2\,x\,(x-3)$.

**4**

**a)** $f(x) = -(x+1)^2(x-1)$

**b)** $f(x) = (x+2)^2\,x\,(x-3)$

**5**

**a)** $f(x) = x(x-2)(x+1)^2$

In der Nähe der Stelle $x_1 = -1$ gilt $f(x) \approx (-1)\cdot(-3)\cdot(x+1)^2 = 3\cdot(x+1)^2$. Der Graph von f verläuft hier wie eine nach oben geöffnete Parabel. Also muss der Graph an der Stelle $x_1 = -1$ einen Tiefpunkt haben.

**b)** $f(x) = -(x+2)(x-2)^2$

**c)** $f(x) = -(x-3)^3(x+1)^2$

In der Nähe der Stelle $x_1 = -1$ gilt $f(x) \approx 64\cdot(x+1)^2$. Der Graph von f verläuft hier wie eine nach oben geöffnete Parabel. Also muss der Graph an der Stelle $x_1 = -1$ einen Tiefpunkt haben.

**6**

**a)** $b = -2$, $c = 1$ und $a = -2$, also $f(x) = -2(x+2)(x-1)$.

**b)** $b = 2$, $c = 2$ und $a = \frac{1}{2}$, also $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$.





Autor: Rüdiger Sandmann

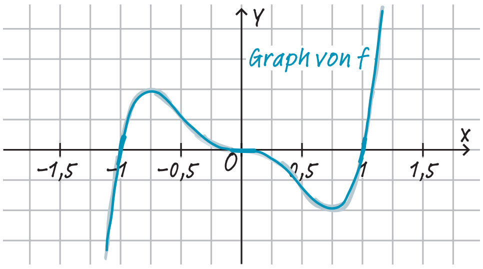
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

**7**

$f(x) = x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1)$

Nullstellen: $x_1 = 0$ (dreifache Nullstelle; also Sattelpunkt des Graphen an dieser Stelle), $x_2 = -1$ und $x_3 = 1$ (jeweils einfache Nullstelle).

Skizze:




**8**

Aus $f_a(x) = 0$ folgt $x^2 = -a$ oder $x = 2$ (Satz vom Nullprodukt).

Für $a > 0$ hat die Funktion genau eine Nullstelle: $x_1 = 2$.

Für $a = 0$ hat die Funktion genau zwei Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = 0$.

Für $a = -4$ hat die Funktion genau zwei Nullstellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = 0$.

Für $a < 0$ und $a \neq -4$ hat die Funktion genau drei Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{-a}$ und $x_3 = -\sqrt{-a}$.

**b)** $f_a(x) = x^4 - ax^2 = x^2(x^2 - a)$. Aus $f_a(x) = 0$ folgt $x_1 = 0$ oder $x^2 - a = 0$.

Für $a > 0$ hat die Funktion genau drei Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{a}$ und $x_3 = -\sqrt{a}$.

Für $a \leq 0$ hat die Funktion genau eine Nullstelle: $x_1 = 0$.

**c)** $f_a(x) = (x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

Für $a > 0$ hat die Funktion genau zwei Nullstellen: $x_1 = a$ und $x_2 = -a$.

Für $a = 0$ hat die Funktion genau eine Nullstellen: $x_1 = 0$.

Für $a < 0$ hat die Funktion keine Nullstellen.

**d)** $f_a(x) = x^4 + 4x^2 + a$. Lösung von $f_a(x) = 0$ durch Substitution:

$u = x^2$: $u^2 + 4u + a = 0$ führt zu $u_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4 - a}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 - a}$.

Nur für $-2 \pm \sqrt{4 - a} \geq 0$ erhält man bei der Rücksubstitution Lösungen, d.h. für $a \leq 0$.

Für $a = 0$ hat die Gleichung die Lösungen $u_1 = 0$ und $u_2 = -4$. Die Rücksubstitution ergibt die einzige Lösung $x_1 = 0$.

Für $a < 0$ hat die Gleichung eine positive und eine negative Lösung.

Somit gilt insgesamt:

Für $a > 0$ hat die Funktion keine Nullstelle.

Für $a = 0$ hat die Funktion genau eine Nullstelle: $x_1 = 0$.

Für $a < 0$ hat die Funktion genau zwei Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{-2 + \sqrt{4 - a}}$ und $x_2 = \sqrt{-2 + \sqrt{4 - a}}$.

**e)** $f_a(x) = x^6 + (a - 1)x^4 - ax^2 = x^2(x^4 + (a - 1)x^2 - a)$

Lösung von $f_a(x) = 0$: $x_1 = 0$.

Substitution $u = x^2$: $u^2 + (a - 1)u - a = 0$ führt zu $u_{1,2} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4a}}{2} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4a}}{2}$

$= \frac{-(a-1) \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1}}{2} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2} = \frac{-(a-1) \pm (a+1)}{2} = \frac{1 - a \pm (a+1)}{2}$, also $u_1 = \frac{1 - a + a + 1}{2} = 1$ und

$u_2 = \frac{1 - a - a - 1}{2} = -a$.

Die Rücksubstitution liefert:

Für $a < 0$ hat die Funktion vier Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\sqrt{-a}$ und $x_4 = \sqrt{-a}$.

Für $a = 0$ hat die Funktion drei Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 0$.

Für $a > 0$ hat die Funktion zwei Nullstellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.





**Autor:** Rüdiger Sandmann

**Seite zu:** Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

**f)** Der zugehörige Graph ist der Graph der Potenzfunktion $x^n$ um a nach oben $(a > 0)$ oder nach unten $(a < 0)$ verschoben.
Bei ungeradem n gibt es genau eine Nullstelle: $x = -\sqrt[n]{a}$.
Bei geradem n gibt es keine Nullstellen für $a > 0$, eine Nullstelle für $a = 0$ $(x = 0)$ und zwei Nullstellen für $a < 0$ $\left(x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{-a}\right)$.

**9**
$f_a(x) = (x - a)(x - (a - 1))(x - 2a)^2 = (x - a)(x - a + 1)(x - 2a)^2$
Für $a = 0$ würde $f_0 = x^3(x + 1)$ folgen und für $a = -1$ würde $f_{-1} = (x + 1)(x + 2)(x + 2)^2 = (x + 1)(x + 2)^3$ folgen. Beide Male hätte die Funktion keine doppelte Nullstelle mehr. Daher darf a nicht die Werte 0 und −1 annehmen.
Es ist $f_1(x) = (x - 1)x(x - 2)^2$.

**10**
Eine Funktion vom Grad vier kann null, eine, zwei, drei oder vier verschiedene Nullstellen haben.
Beispiel für keine Nullstelle: f mit $f(x) = x^4 + 1$.
Beispiel für eine Nullstelle: f mit $f(x) = x^4$.
Beispiel für zwei verschiedene Nullstellen: f mit $f(x) = x^4 - 1$.
Beispiel für drei verschiedene Nullstellen: f mit $f(x) = x^4 - x^2$.
Beispiel für vier verschiedene Nullstellen: f mit $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
Mehr als vier Nullstellen kann eine ganzrationale Funktion vom Grad vier nicht haben, da z.B. fünf Nullstellen auch fünf Linearfaktoren entsprächen und dies einen Grad von fünf zur Folge hätte.

**11**
In der Nähe der Stelle $x = a$ gilt $f_a(x) = g(x) \cdot (x - a)^2 \approx g(a) \cdot (x - a)^2$. Der Graph von f ist in der Nähe der Stelle $x = a$ eine nach oben oder unten geöffnete Parabel, hat also an der Stelle $x = a$ eine Extremstelle.

**12**
Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f.
**a)** Es sei $x_1 = a$ eine n-fache Nullstelle $(n \geq 2)$. Dann kann man f schreiben als $f(x) = (x - a)^n \cdot g(x)$, wobei g eine ganzrationale Funktion ist.
$f'(x) = n \cdot (x - a)^{n-1} \cdot g(x) + (x - a)^n \cdot g'(x)$
Es ist $f(a) = 0$ und $f'(a) = 0$. Somit berührt der Graph an der Stelle $x = a$ die x-Achse.
**b)** Es sei $x_1 = a$ eine dreifache Nullstelle. Dann kann man f schreiben als $f(x) = (x - a)^3 \cdot g(x)$, wobei g eine ganzrationale Funktion ist mit $g(a) \neq 0$.
$f'(x) = 3(x - a)^2 \cdot g(x) + (x - a)^3 \cdot g'(x) = (x - a)^2(3g(x) + (x - a)g'(x))$
$f''(x) = 6(x - a) \cdot g(x) + 3(x - a)^2 \cdot g'(x) + 3(x - a)^2 \cdot g(x) + (x - a)^3 \cdot g''(x)$
$f'''(x) = 6 \cdot g(x) + 6(x - a) \cdot g'(x) + 6(x - a) \cdot g'(x) + 3(x - a)^2 \cdot g''(x) + 6(x - a) \cdot g(x) + 3(x - a)^2 \cdot g'(x)$
$+ 3(x - a)^2 \cdot g''(x) + (x - a)^3 \cdot g'''(x)$
Es ist $f''(a) = 0$ und $f'''(a) = 6 \cdot g(a) \neq 0$ und a somit eine Wendestelle von f.

**13**
Es sei $f(x) = (x - a)^n \cdot g(x)$ mit $g(a) \neq 0$. Dann ist $x = a$ eine n-fache Nullstelle von f.
Es ist $f'(x) = n \cdot (x - a)^{n-1} \cdot g(x) + (x - a)^n \cdot g'(x) = (x - a)^{n-1}(n \cdot g(x) + (x - a) \cdot g'(x))$.
Für $x = a$ gilt: $(n \cdot g(x) + (x - a) \cdot g'(x)) = n \cdot g(a) \neq 0$. Daher ist $x = a$ eine $(n - 1)$-fache Nullstelle von f.

Begründung von Satz 4:
Für $n = 1$: klar.
Für ein gerades n gilt: $x = a$ ist eine Nullstelle gerader Ordnung von f und eine Nullstelle ungerader Ordnung von f'. Somit hat f' einen Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = a$. Bei $x = a$ liegt also eine Extremstelle vor.
Für ein ungerades n gilt: $x = a$ ist eine Nullstelle gerader Ordnung von f' und eine Nullstelle ungerader Ordnung von f''. Somit hat f'' einen Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = a$. Bei $x = a$ liegt also eine Sattelstelle vor.

Einen formalen Beweis kann man mit dem Verfahren der vollständigen Induktion führen.




Autor: Rüdiger Sandmann
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5