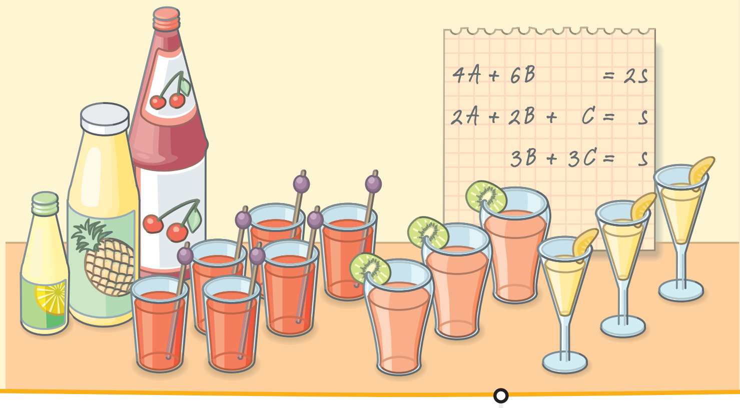
LGS mit Parametern auf der rechten Seite

Für drei Mixgetränke benötigt der Barkeeper Manuel jeweils unterschiedliche Mengen der drei Zutaten A, B und C.
Für ein großes Fest will Manuel vom ersten Getränk jeweils doppelt so viel wie vom zweiten und dritten herstellen.
Erläutern Sie das zugehörige LGS.
Die Variable s steht für die Menge in Litern.
Bestimmen Sie die Mengen der Zutaten A, B und C in Abhängigkeit der Literanzahl s.



Zur Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems (LGS) verwendet man das Gauß-Verfahren. Dabei bringt man es systematisch auf Stufenform, sodass man die Lösungsmenge des LGS leicht bestimmen kann. Dies soll an zwei Beispielen wiederholt werden.

LGS mit genau einer Lösung in Stufenform:

$$\begin{array}{rrrl} 5x_1 + & 2x_2 - & x_3 & = 3 \\ & -3x_2 + & 4x_3 & = 3 \\ & & -2x_3 & = 0 \end{array}$$

Aus der dritten Gleichung folgt $x_3 = 0$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, ergibt sich $x_2 = -1$. Durch Einsetzen von $x_3 = 0$ und $x_2 = -1$ in die erste Gleichung erhält man $x_1 = 1$.

Das LGS hat genau eine Lösung; die Lösungsmenge ist $L = \{(1; -1; 0)\}$.

LGS mit unendlich vielen Lösungen in Stufenform:

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 - & x_2 + & x_3 & = 1 \\ & x_2 + & 3x_3 & = 5 \end{array}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x_2 = 5 - 3x_3$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, ergibt sich $x_1 = 3 - 2x_3$. Für z. B. $x_3 = t$ ist also $x_2 = 5 - 3t$ und $x_1 = 3 - 2t$.

Das LGS hat unendlich viele Lösungen; die Lösungsmenge ist $L = \{(3 - 2t;\ 5 - 3t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Es gibt lineare Gleichungssysteme, die neben den Variablen x_1, x_2, x_3 … auch noch **Parameter** beinhalten. Stehen der Parameter r und die Variablen x_1, x_2, x_3 … auf verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichens – in der Regel der Parameter also rechts –, so lässt sich das zugehörige LGS ebenfalls mit dem Gauß-Verfahren lösen. Die Lösungsmenge ist dann abhängig vom Parameter r, wie das folgende Beispiel zeigt.

$$\begin{array}{lrrrl} \text{I} & 3x_1 - & 2x_2 + & x_3 & = 2r \\ \text{II} & 5x_1 - & 4x_2 - & x_3 & = 2 \\ \text{III} & x_1 + & 3x_2 - & 2x_3 & = 2r + 6 \end{array}$$

$\text{IIa} = 3 \cdot \text{II} + (-5 \cdot \text{I})$
$\text{IIIa} = 3 \cdot \text{III} + (-\text{I})$

$$\begin{array}{lrrrl} \text{I} & 3x_1 - & 2x_2 + & x_3 & = 2r \\ \text{IIa} & & -2x_2 - & 8x_3 & = 6 - 10r \\ \text{IIIa} & & 11x_2 - & 7x_3 & = 4r + 18 \end{array}$$

$\text{IIb} = \text{IIa} : 2$
$\text{IIIb} = 11 \cdot \text{IIa} + 2 \cdot \text{IIIa}$

$$\begin{array}{lrrrl} \text{I} & 3x_1 - & 2x_2 + & x_3 & = 2r \\ \text{IIb} & & -x_2 - & 4x_3 & = 3 - 5r \\ \text{IIIb} & & & -102x_3 & = -102r + 102 \end{array}$$

Autor: Dr. Rebecca Roy

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Gleichung IIIb ist äquivalent zu $x_3 = r - 1$.
Setzt man dies in IIa ein, erhält man $-x_2 - 4 \cdot (r - 1) = 3 - 5r$.
Daraus ergibt sich $x_2 = r + 1$.
Dies in I eingesetzt liefert $3x_1 - 2 \cdot (r + 1) + (r - 1) = 2r$ und damit $3x_1 = 3r + 3$, also $x_1 = r + 1$.
Da die Lösungsmenge dieses LGS vom Parameter r abhängt, bezeichnet man sie mit L_r. Es ist
$L_r = \{(r + 1;\ r + 1;\ r - 1)\}$.
Für ein festes r hat das LGS also genau eine Lösung; so gilt z.B. für $r = 4$: $L_4 = \{(5; 5; 3)\}$.

Stehen bei einem LGS auf der rechten Seite ein oder mehrere **Parameter**, so wird das LGS auf Stufenform gebracht und schrittweise nach $x_1, x_2, x_3 \dots$ aufgelöst.
Dabei ist die Lösung in der Regel abhängig von den Parametern.

Beispiel 1 **LGS mit Parameter in Matrixschreibweise lösen**
Lösen Sie das in Matrixschreibweise gegebene LGS in Abhängigkeit von r.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & r+2 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2r+6 \end{array}\right)$$

Lösung

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & r+2 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2r+6 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \mathrm{IIa} = \mathrm{II} + (-2 \cdot \mathrm{I}) \\ \mathrm{IIIa} = 2 \cdot \mathrm{III} + (-\mathrm{I}) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{IIa} \\ \mathrm{IIIa} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & r+2 \\ 0 & -7 & -2 & -2r-4 \\ 0 & 0 & 4 & 10+3r \end{array}\right)$$

Aus IIIa ergibt sich: $x_3 = \frac{3}{4}r + \frac{5}{2}$.

Damit erhält man aus IIa: $x_2 = \frac{1}{14}r - \frac{1}{7}$.

Daraus folgt aus I: $x_1 = -\frac{9}{28}r - \frac{19}{14}$.

$L_r = \left\{\left(-\frac{9}{28}r - \frac{19}{14};\ \frac{1}{14}r - \frac{1}{7};\ \frac{3}{4}r + \frac{5}{2}\right)\right\}$

Beispiel 2 **LGS mit zwei Parametern auf der rechten Seite lösen**
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit von r und s.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 - r \\ x_2 - 3x_3 &= r + s \\ 2x_3 &= 6s \end{aligned}$$

Lösung
Aus der 3. Zeile ergibt sich: $x_3 = 3s$.
Aus der 2. Zeile folgt: $x_2 = r + 10s$.
Aus der 1. Zeile erhält man: $x_1 = 2 - r - \frac{7}{2}s$.

$L_{r,s} = \left\{\left(2 - r - \frac{7}{2}s;\ r + 10s;\ 3s\right)\right\}$

Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit von r.

a) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_3 &= r - 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2r \\ x_2 - x_3 &= r - 1 \\ 3x_3 &= 6r \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ x_2 + x_3 &= r + 3 \\ 4x_3 &= 3r \end{aligned}$

○ **2** Das LGS ist in Matrixschreibweise gegeben. Bestimmen Sie seine Lösungsmenge in Abhängigkeit von r.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3r \\ 1 & 2 & 1 & 8r \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & r+4 \\ 3 & -1 & 2 & 11r-5 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2r+3r \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & -r+12 \end{array}\right)$

Autor: Dr. Rebecca Roy
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

○ **3** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit von r.

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= r + 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 + 6r \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 3r - 6 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2r + 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= -14 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 - r \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= r + 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= r + 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2r + 6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2r + 5 \\ 3x_1 - 2x_3 &= -r - 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 3r + 13 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 5x_1 + x_3 &= 4r + 1 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3r \\ x_1 + x_3 &= 2r + 2 \\ -x_2 + x_3 &= -r \end{aligned}$

○ Test

4 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit von r.

a) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= r - 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4r - 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 2r + 1 \\ 3x_2 + x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 &= 3r - \tfrac{5}{2} \end{aligned}$

◒ **5** Geben Sie ein LGS mit der gegebenen Lösungsmenge an. Dabei darf pro Zeile maximal ein Koeffizient 0 sein.

a) $L_r = \{(r;\ r + 1;\ -2r)\}$

b) $L_r = \{(r + 2;\ 0;\ 2r + 1)\}$

c) $L_r = \{(2;\ r;\ 2r)\}$

d) $L_r = \{(2r + 1;\ r - 1;\ r + 2)\}$

◒ **6** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit von r und s.

a) $\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= -2s \\ x_2 - x_3 &= r - s \\ x_3 &= r + 2s \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= r + s + 4 \\ 2x_3 &= 2s + 4 \end{aligned}$

◒ **7** Das LGS ist in Matrixschreibweise gegeben. Bestimmen Sie seine Lösungsmenge in Abhängigkeit der beiden Parameter r und s.

a) $\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & r + s \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -3s \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{rrr|l} 2 & -1 & -1 & r \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & s + 3 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{rrr|l} 2 & 3 & -2 & s \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & r \end{array}\right)$

◒ **8** Geben Sie ein LGS zur Lösungsmenge $L_{r,s} = \{(r + s;\ r - 1;\ r - s)\}$ in Matrixschreibweise an. Dabei soll kein Eintrag der Matrix 0 sein.

◒ Test

9 Das LGS ist in Matrixschreibweise gegeben. Bestimmen Sie seine Lösungsmenge in Abhängigkeit der beiden Parameter r und s.

a) $\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & -1 & 2s + 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2r + s \\ 1 & -2 & 0 & r + 2 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{rrr|l} 2 & 1 & -1 & s - 2 \\ 3 & 0 & 2 & r + 3s + 4 \\ 0 & 3 & 1 & -2r - 3s + 2 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & -1 & -3s \\ 2 & -2 & 1 & 2r + s \\ -3 & 1 & 1 & 3s \end{array}\right)$

● **10** Geben Sie ein je ein LGS zu den beiden Lösungsmengen $A = \{(2r;\ r + 1;\ r - 2)\}$ und $B = \{(2r;\ r + 1;\ r - 2) \mid r \in \mathbb{R}\}$ an und beschreiben Sie den Unterschied.

● **11** Das LGS mit dem Parameter r hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= r + 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2r \\ 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2r \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= r + 2 \\ 3x_1 - x_3 &= r - 2 \end{aligned}$

Autor: Dr. Rebecca Roy

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

Einstiegsaufgabe

Das LGS stellt eine Anleitung zum Mixen der drei Getränke dar, das in Abhängigkeit der Literanzahl s die notwendige Menge der einzelnen Zutaten in Litern angibt. Dabei steht jede Zeile für die Zusammensetzung eines Mixgetränks.

Lösungsmenge: $L = \left\{\left(\frac{s}{4};\ \frac{s}{6};\ \frac{s}{6}\right)\right\}$.

1

a) $L_r = \{(r+2;\ 2r;\ r-2)\}$ b) $L_r = \{(r+1;\ 3r-1;\ 2r)\}$ c) $L_r = \left\{\left(\frac{1}{2}r+2;\ \frac{1}{4}r+3;\ \frac{3}{4}r\right)\right\}$

2

a) $L_r = \{(r;\ 2r;\ 3r)\}$ b) $L_r = \{(2r;\ r+1;\ 3r-2)\}$ c) $L_r = \left\{\left(r+2;\ \frac{1}{2}r-1;\ 1\right)\right\}$

3

a) $L_r = \{(-3r;\ r+2;\ 6r)\}$ b) $L_r = \{(2r;\ r+3;\ 1-r)\}$ c) $L_r = \{\ \}$

d) $L_r = \{(r+3;\ r+5;\ 2r+7)\}$ e) $L_r = \left\{\left(\frac{3}{4}r;\ -\frac{1}{2}r;\ \frac{1}{4}r+1\right)\right\}$ f) $L_r = \{\ \}$

4

a) $L_r = \{(3r+5;\ 7;\ 2r+1)\}$ b) $L_r = \left\{\left(\frac{5}{2}r;\ \frac{1}{2}r-\frac{5}{2};\ -\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}\right)\right\}$

5

Individuelle Lösung, z. B.:

a)
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\ + x_3 = -r \\ x_1 + x_2 \qquad\ = 2r+1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} x_1 + \ x_2 \qquad\ = r+2 \\ x_1 \qquad\ - x_3 = -r+1 \\ \qquad 5x_2 + x_3 = 2r+1 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = -r+2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3r+2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = r+2 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - \ x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = r-4 \\ \qquad x_2 + \ x_3 = 2r+1 \end{array}$$

6

a) $L_{r,s} = \{(r+s;\ 2r+s;\ r+2s)\}$ b) $L_{r,s} = \{(r+3;\ r-s;\ s+2)\}$

7

a) $L_{r,s} = \{(r+s;\ r-s;\ 2r)\}$ b) $L_{r,s} = \{(r+1;\ s+2;\ r-s)\}$ c) $L_{r,s} = \{(r;\ s;\ r+s)\}$

8

Individuelle Lösung, z. B.:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & 3r-1 \\ 1 & -1 & 1 & r+1 \\ 2 & -1 & -1 & 3s+1 \end{array}\right)$$

9

a) $L_{r,s} = \{(r+2s;\ s-1;\ r-1)\}$ b) $L_{r,s} = \left\{\left(\frac{1}{3}r+s;\ -\frac{2}{3}r-s;\ 2\right)\right\}$ c) $L_{r,s} = \{(r-s;\ r-s;\ 2r+s)\}$

10

Das LGS zur Lösungsmenge A ist ein LGS mit Parameter; das LGS zur Lösungsmenge B ist ein LGS ohne Parameter, aber mit unendlich vielen Lösungen.

Lineare Gleichungssysteme: individuelle Lösung, z. B.:

LGS zu A:
$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - \ x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\ - 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 \qquad\ = 3r+1; \end{array}$$

LGS zu B:
$$\begin{array}{l} x_1 \qquad\ - 2x_3 = 4 \\ \qquad x_2 - \ x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \end{array}$$

11

a) $L_r = \left\{\left(-\frac{2}{3}+r-\frac{1}{3}t;\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3}t;\ t\right) \middle|\ t \in \mathbb{R}\right\}$ b) $L_r = \left\{\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}r+\frac{1}{3}t;\ \frac{2}{3}+\frac{2}{3}r-\frac{5}{6}t;\ t\right) \middle|\ t \in \mathbb{R}\right\}$

Autor: Dr. Rebecca Roy

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5