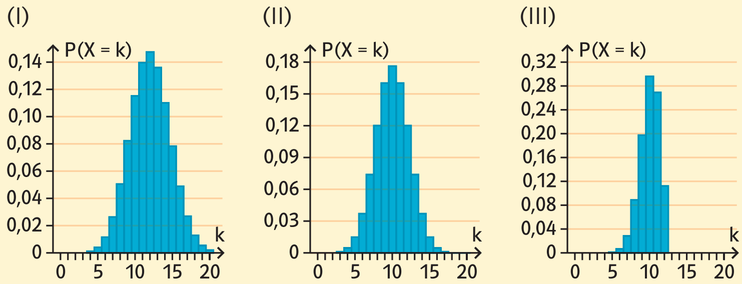
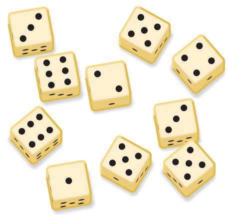
Binomialverteilung – Kenngrößen und Histogramm

Abgebildet sind Histogramme binomialverteilter Zufallsgrößen. Ordnen Sie jedem das richtige Parameterpaar zu.
A: $n = 12$, $p = \frac{5}{6}$
B: $n = 20$, $p = 0{,}5$
C: $n = 30$, $p = 0{,}4$



Es werden zehn Würfel geworfen. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der geworfenen Sechsen. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X (gerundete Werte).



x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x_i)$	0,162	0,323	0,291	0,155	0,054	0,013	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000

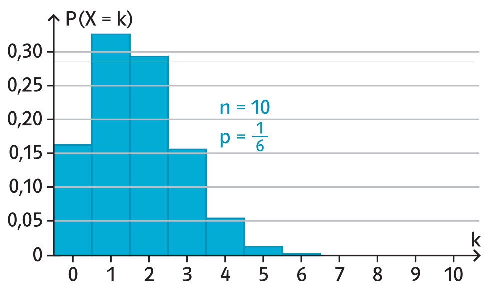
Ausgehend hiervon lassen sich zwei wichtige Kenngrößen berechnen. Der **Erwartungswert** μ und die **Standardabweichung** σ von X.

Mit der Formel $\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$ ergibt sich
$\mu = E(X) \approx 0 \cdot 0{,}162 + 1 \cdot 0{,}323 + 2 \cdot 0{,}291 + 3 \cdot 0{,}155 + 4 \cdot 0{,}054 + 5 \cdot 0{,}013 + 6 \cdot 0{,}002 \approx 1{,}667$.
Auf lange Sicht, d.h. wenn man sehr oft zehn Würfel wirft, erhält man somit im Durchschnitt pro Wurf ca. 1,667 Sechsen. Dieser Wert ist auch plausibel, denn wenn man häufig zehn Würfel wirft, wird man durchschnittlich $10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \approx 1{,}667$ Sechsen pro Wurf erwarten. Hier gilt also $\mu = n \cdot p$. Man kann zeigen, dass diese Formel für den Erwartungswert jeder binomialverteilten Zufallsgröße gilt.

Mit der Formel $\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)}$ ergibt sich für die Standardabweichung $\sigma \approx 1{,}179$. Für binomialverteilte Zufallsgrößen gibt es auch für σ eine einfache Formel: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$. Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung einer Verteilung um ihren Erwartungswert.

Satz: Eine $B_{n;\,p}$-verteilte Zufallsgröße hat den Erwartungswert $\boldsymbol{\mu = n \cdot p}$ und die Standardabweichung $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$.

Das nebenstehende Histogramm stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zum Wurf von zehn Würfeln (s.o.) grafisch dar.
Bei binomialverteilten Zufallsgrößen gilt:
Wenn μ ganzzahlig ist, dann ist die höchste Säule bei $k = \mu$. Wenn μ nicht ganzzahlig ist, dann ist die höchste Säule bei einem der beiden benachbarten ganzzahligen Werte. Wie dieses Beispiel zeigt, muss es jedoch nicht der nächstgelegene ganzzahlige Wert sein. Beim Wurf von zehn Würfeln ist nämlich $\mu \approx 1{,}667$, aber die höchste Säule liegt bei 1. Es gibt zudem auch den Fall, dass die beiden benachbarten ganzzahligen Werte gleich wahrscheinlich sind (vgl. Aufgabe 2 c)).



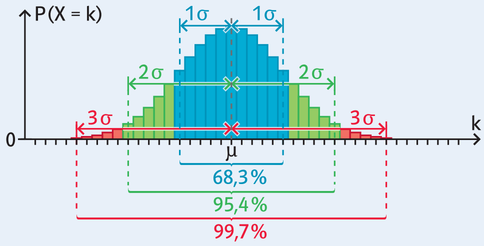
Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Für die Standardabweichung σ gilt: Je größer σ ist, desto breiter ist das Histogramm. Dabei gilt der folgende Zusammenhang.

Sigma-Regeln: Gilt für eine binomialverteilte Zufallsgröße die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$, so kann die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung angenähert werden. Wenn n hinreichend groß ist, gelten folgende Näherungsformeln:

1. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$,
2. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$,
3. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$.

Je näher p bei 0,5 liegt, desto besser sind die Näherungsformeln im Allgemeinen.



Das zum Erwartungswert μ symmetrische Intervall $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$ nennt man **σ-Intervall**. Entsprechend spricht man vom 2σ-Intervall und vom 3σ-Intervall.

Beispiel 1 Erwartungswert bestimmen und Histogramm zeichnen

Das Glücksrad wird in Fig. 1 achtmal gedreht. Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft „rot" erscheint.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.

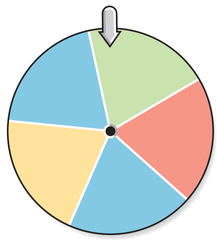


Fig. 1

Lösung

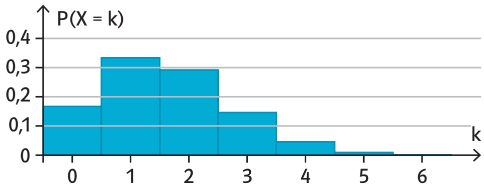
a) X ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = \frac{1}{5}$. Damit ist $\mu = 8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$. Auf lange Sicht kann man im Durchschnitt pro achtmaligem Drehen mit 1,6-mal „rot" rechnen.

b) Wahrscheinlichkeitsverteilung (WTR):

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,168	0,336	0,294	0,147

x_i	4	5	6	7	8
$P(X = x_i)$	0,046	0,009	0,001	0,000	0,000

Histogramm:



Beispiel 2 Erwartungswert und Standardabweichung bestimmen

Bei einer Sorte Blumenzwiebeln beträgt die Keimwahrscheinlichkeit 85 %. Es werden 130 Zwiebeln gesetzt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Zwiebeln an, die keimen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des σ-Intervalls und berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Näherungswertes, den die Sigma-Regel liefert, vom tatsächlichen Wert.

Lösung

X ist binomialverteilt mit $n = 130$ und $p = 0{,}85$. Der Erwartungswert ist $\mu = 130 \cdot 0{,}85 = 110{,}5$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{130 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15} \approx 4{,}071$. Es ist $\mu + \sigma \approx 114{,}571$ und $\mu - \sigma \approx 106{,}429$; also gilt $P(106{,}429 \leq X \leq 114{,}571) = P(107 \leq X \leq 114) = P(X \leq 114) - P(X \leq 106)$ $\approx 0{,}837 - 0{,}162 = 0{,}675$ (WTR). Die Sigma-Regel liefert den Wert 0,683. Es ist $\frac{0{,}683}{0{,}675} \approx 1{,}012$. Damit beträgt die Abweichung ca. 1,2 %.

Aufgaben

○ **1** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße mit den Parametern n und p.

a) $n = 20,\ p = 0{,}3$ **b)** $n = 20,\ p = 0{,}7$ **c)** $n = 50,\ p = 0{,}5$ **d)** $n = 250,\ p = 0{,}1$

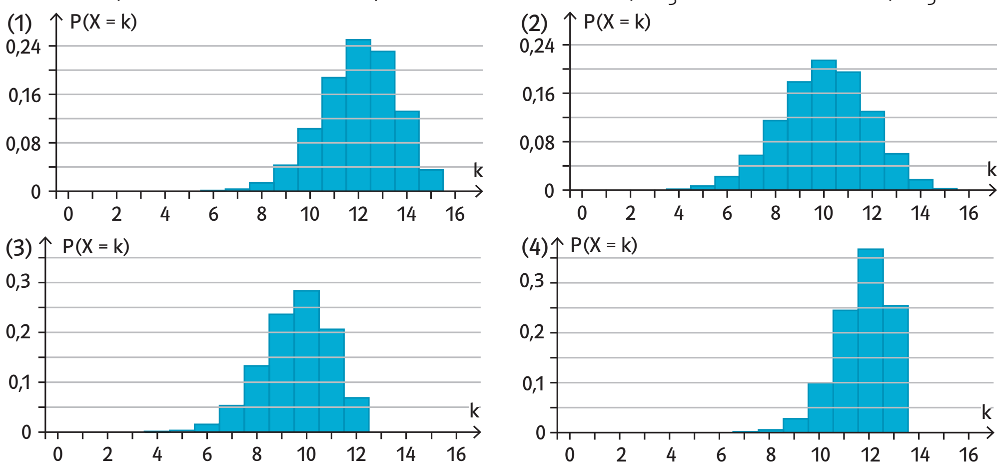
○ **2** Erstellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der $B_{n;\,p}$-verteilten Zufallsgröße X und zeichnen Sie das zugehörige Histogramm. Markieren Sie den Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit und vergleichen Sie ihn mit dem Erwartungswert.

a) $n = 5,\ p = 0{,}2$ **b)** $n = 5,\ p = \frac{1}{3}$ **c)** $n = 5,\ p = 0{,}5$ **d)** $n = 5,\ p = 0{,}85$

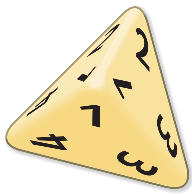
Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

○ **3** Ordnen Sie dem Histogramm die passenden Parameter der zugehörigen binomialverteilten Zufallsgröße zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

A: $n = 12,\ p = 0{,}8$ B: $n = 13,\ p = 0{,}9$ C: $n = 15,\ p = \frac{2}{3}$ D: $n = 15,\ p = \frac{4}{5}$



○ **4** Ein idealer Tetraederwürfel wird 50-mal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der geworfenen Einsen an.

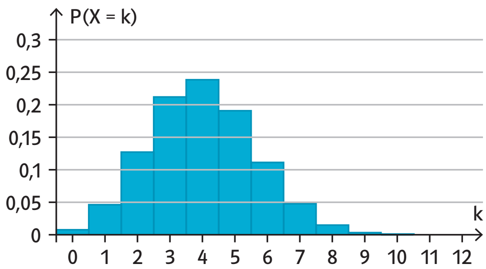


a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
b) Bestimmen Sie das σ-Intervall und dessen Wahrscheinlichkeit.
c) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Näherungswertes, den die Sigma-Regel liefert, vom tatsächlichen Wert.

○ Test

5 Das nebenstehende Histogramm gehört zu einer $B_{n;\,p}$-verteilten Zufallsgröße X. Ordnen Sie die richtigen Parameter zu und begründen Sie, warum es die anderen beiden Parameterpaare nicht sein können.

A $n = 6,\ p = \frac{2}{3}$ B $n = 12,\ p = \frac{1}{3}$ C $n = 15,\ p = \frac{1}{5}$



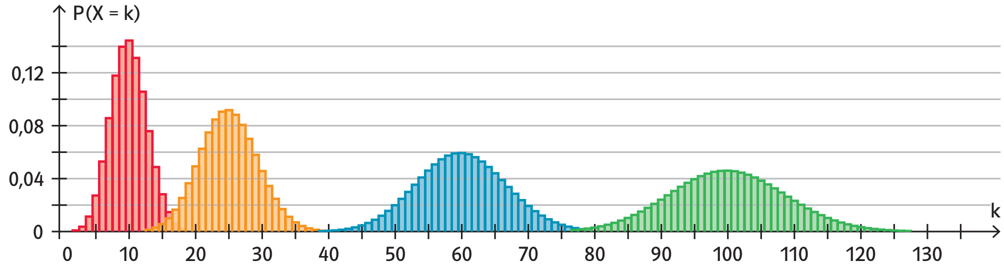
6 Ein idealer Würfel wird 30-mal geworfen. Die Zufallsgröße X zählt, wie oft eine Drei fällt.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des σ-Intervalls und berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Näherungswertes, den die Sigma-Regel liefert, vom tatsächlichen Wert.

◒ **7** Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0{,}6$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des σ-Intervalls sowie die prozentuale Abweichung des Näherungswertes, den die Sigma-Regel liefert. Überprüfen Sie die Laplace-Bedingung und beurteilen Sie die Güte der Näherung.
a) $n = 12$ **b)** $n = 20$ **c)** $n = 50$ **d)** $n = 100$ **e)** $n = 120$ **f)** $n = 300$

◒ **8** Geben Sie für die Anzahl der Sechsen beim n-maligen Werfen eines idealen Würfels das 2σ-Intervall mithilfe der Sigma-Regeln an. Bestätigen Sie, dass die Laplace-Bedingung erfüllt ist.
a) $n = 100$ **b)** $n = 200$ **c)** $n = 400$ **d)** $n = 1000$

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

9 Abgebildet sind Histogramme von Binomialverteilungen mit $p = \frac{1}{4}$ und verschiedenen n. Der Erwartungswert ist jeweils ganzzahlig.
Beschreiben Sie, wie sich μ und σ für wachsendes n verhalten, und begründen Sie diese Aussage.

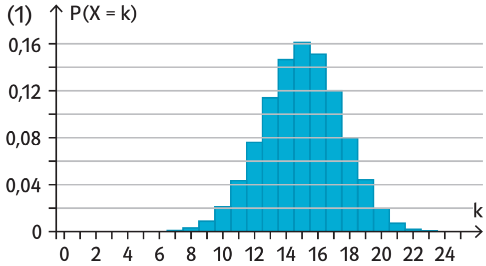


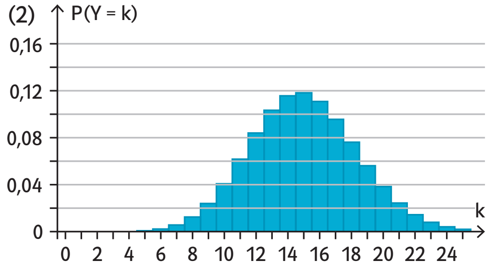
10 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt. Sie hat den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ. Bestimmen Sie die Parameter n und p.
a) $\mu = 6$ und $\sigma = \sqrt{3}$ **b)** $\mu = 13{,}5$ und $\sigma = \sqrt{9{,}45}$ **c)** $\mu = \frac{100}{3}$ und $\sigma = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{2}$

11 Die Zufallsgrößen X und Y sind binomialverteilt und haben beide den Erwartungswert $\mu = 15$. Ordnen Sie jeder Standardabweichung das zugehörige Histogramm zu und berechnen Sie jeweils die Parameter n und p.

A $\sigma \approx 3{,}35$

B $\sigma \approx 2{,}45$





Test

12 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt. Es ist $\mu = 40$ und $\sigma = \sqrt{8}$. Bestimmen Sie n und p.

13 Zeigen Sie, dass es keine binomialverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 10$ und $\sigma = 3$ gibt.

14 Beweisen Sie, dass das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße mit $p = \frac{1}{2}$ achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$ ist.

15 Die Tabelle zeigt einen Auszug aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X. Ihr Erwartungswert und ihre Standardabweichung sind ganzzahlig. Ermitteln Sie die zugehörigen Parameter n und p.

x_i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$P(X = x_i)$	0,034	0,048	0,064	0,079	0,091	0,098	0,099	0,095	0,085	0,072	0,058	0,044	0,032

16 Die Zufallsgröße X gibt die Augenzahl beim einmaligen Werfen eines idealen Würfels an.
a) Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.
c) Markieren Sie das σ-Intervall im Histogramm und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit sowie die des 2σ- und des 3σ-Intervalls.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

Einstiegsaufgabe

Bei A ist $E(X) = 12 \cdot \frac{5}{6} = 10$, bei B ist $E(X) = 20 \cdot 0{,}5 = 10$ und bei C ist $E(X) = 30 \cdot 0{,}4 = 12$.
C gehört zu (I), da hier bei $k = 12$ die höchste Säule ist. A gehört zu (III), denn bei (II) ist $P(X = k)$ auch für Werte von k, die größer als 12 sind, positiv. Damit gehört B zu (II).

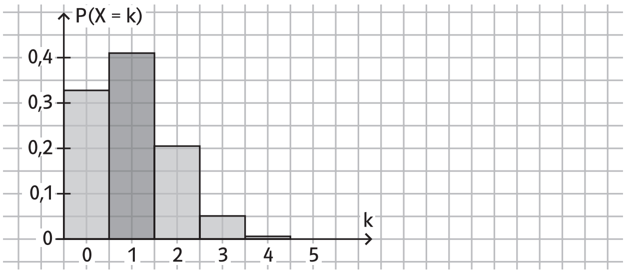
1

a) $\mu = 6$; $\sigma = \sqrt{4{,}2} \approx 2{,}05$
b) $\mu = 14$; $\sigma = \sqrt{4{,}2} \approx 2{,}05$
c) $\mu = 25$; $\sigma = \sqrt{2{,}5} \approx 3{,}54$
d) $\mu = 25$; $\sigma = \sqrt{22{,}5} \approx 4{,}74$

2

a)

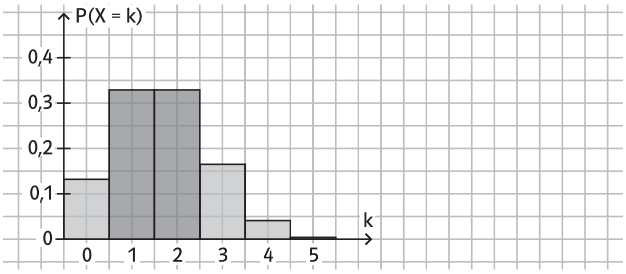
x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,328	0,410	0,205	0,051	0,006	0,000



Der Wert zu $k = 1$ hat die größte Wahrscheinlichkeit. Dieser Wert von k ist gleich dem Erwartungswert $\mu = 5 \cdot 0{,}2 = 1$.

b)

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,132	0,329	0,329	0,165	0,041	0,004



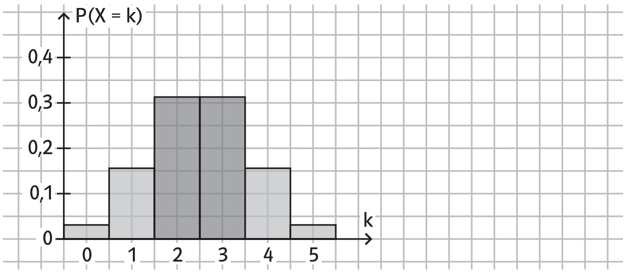
Die Werte zu $k = 1$ und $k = 2$ haben die größte Wahrscheinlichkeit. Diese Werte von k sind ungleich dem Erwartungswert $\mu = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

c)

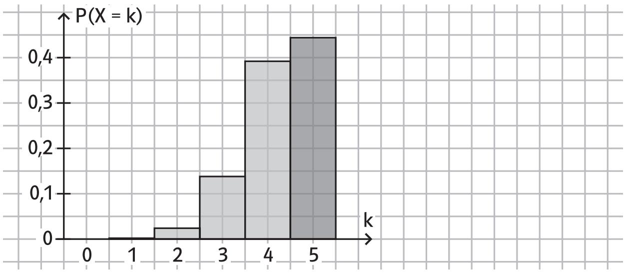
x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,031	0,156	0,313	0,313	0,156	0,031



Die Werte zu $k = 2$ und $k = 3$ haben die größte Wahrscheinlichkeit. Diese Werte von k sind ungleich dem Erwartungswert $\mu = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$.

d)

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,000	0,002	0,024	0,138	0,392	0,444



Der Wert zu $k = 5$ hat die größte Wahrscheinlichkeit. Dieser Wert von k ist ungleich dem Erwartungswert $\mu = 5 \cdot 0{,}85 = 4{,}25$.

3

Man berechnet zunächst die Erwartungswerte der vier binomialverteilten Zufallsgrößen. Zudem berücksichtigt man: Wenn μ ganzzahlig ist, dann ist die höchste Säule im Histogramm bei $k = \mu$. Wenn μ nicht ganzzahlig ist, dann ist die höchste Säule bei einem der beiden benachbarten ganzzahligen Werte (oder bei beiden).

A: $\mu = 12 \cdot 0{,}8 = 9{,}6$
B: $\mu = 13 \cdot 0{,}9 = 11{,}7$
C: $\mu = 15 \cdot \frac{2}{3} = 10$
D: $\mu = 15 \cdot 0{,}8 = 12$

(1) gehört zu D, da die höchste Säule bei $k = 12$ ist. Aufgrund des Erwartungswertes käme noch B infrage. Bei B können jedoch nur Werte bis $k = 13$ angenommen werden, sodass B nicht passt.
(2) gehört zu C, da die höchste Säule bei $k = 10$ ist. Aufgrund des Erwartungswertes käme noch A infrage. Bei A können jedoch nur Werte bis $k = 12$ angenommen werden, sodass A nicht passt.
(3) gehört zu A, da die höchste Säule bei $k = 10$ ist. Aufgrund des Erwartungswertes käme noch C infrage. Bei C haben jedoch die k-Werte 13, 14 und 15 positive Wahrscheinlichkeiten, sodass C nicht passt.
(4) gehört zu B, da die höchste Säule bei $k = 12$ ist. Aufgrund des Erwartungswertes käme noch D infrage. Bei D haben jedoch die k-Werte 14 und 15 positive Wahrscheinlichkeiten, sodass D nicht passt.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

4

a) X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}25$. Es ist $\mu = 50 \cdot 0{,}25 = 12{,}5$ und
$\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{9{,}375} \approx 3{,}062$.
b) $\mu - \sigma \approx 9{,}438$ und $\mu + \sigma \approx 15{,}562$
Es ist $P(9{,}438 \leq X \leq 15{,}562) = P(10 \leq X \leq 15) \approx 0{,}673$.
c) Die Sigma-Regel liefert den Wert 0,683. Es ist $\frac{0{,}683}{0{,}673} \approx 1{,}015$. Damit beträgt die prozentuale Abweichung ca. 1,5 %.

5

Die Parameter sind $n = 12$ und $p = \frac{1}{3}$.
Die Werte von A können es nicht sein, weil das Histogramm auch für $k > 6$ noch positive Wahrscheinlichkeiten zeigt.
Die Werte von C können es nicht sein, weil hier $\mu = 15 \cdot \frac{1}{5} = 3$ ist, die höchste Säule also bei $k = 3$ sein müsste.

6

a) $\mu = 30 \cdot \frac{1}{6} = 5$, $\sigma = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{25}{6}} \approx 2{,}041$
b) $\mu - \sigma \approx 2{,}959$; $\mu + \sigma \approx 7{,}041$
$P(2{,}959 \leq X \leq 7{,}041) = P(3 \leq X \leq 7) \approx 0{,}784$
Die Sigma-Regel liefert den Wert 0,683. Es ist $\frac{0{,}683}{0{,}784} \approx 0{,}871$ und $1 - 0{,}871 = 0{,}129$. Damit beträgt die prozentuale Abweichung ca. 12,9 %.

7

a) $\mu = 7{,}2$, $\sigma \approx 1{,}697$, $P(5{,}503 \leq X \leq 8{,}897) = P(6 \leq X \leq 8) \approx 0{,}616$
Prozentuale Abweichung: ca. 10,9 %.
b) $\mu = 12$, $\sigma \approx 2{,}191$, $P(9{,}809 \leq X \leq 14{,}191) = P(10 \leq X \leq 14) \approx 0{,}747$
Prozentuale Abweichung: ca. 8,6 %.
c) $\mu = 30$, $\sigma \approx 3{,}464$, $P(26{,}536 \leq X \leq 33{,}464) = P(27 \leq X \leq 33) \approx 0{,}688$
Prozentuale Abweichung: ca. 0,7 %.
d) $\mu = 60$, $\sigma \approx 4{,}899$, $P(55{,}101 \leq X \leq 64{,}899) = P(56 \leq X \leq 64) \approx 0{,}642$
Prozentuale Abweichung: ca. 6,4 %.
e) $\mu = 72$, $\sigma \approx 5{,}367$, $P(66{,}633 \leq X \leq 77{,}367) = P(67 \leq X \leq 77) \approx 0{,}695$
Prozentuale Abweichung: ca. 1,7 %.
f) $\mu = 180$, $\sigma \approx 8{,}485$, $P(171{,}515 \leq X \leq 188{,}485) = P(172 \leq X \leq 188) \approx 0{,}684$
Prozentuale Abweichung: ca. 0,01 %.

Bei c) bis f) ist die Laplace-Bedingung erfüllt. Hier ist die prozentuale Abweichung deutlich kleiner als bei a) und b).

8

a) Es ist $\mu = 100 \cdot \frac{1}{6} = \frac{50}{3} \approx 16{,}667$, $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{125}{9}} \approx 3{,}727 > 3$, $\mu - \sigma \approx 12{,}940$ und $\mu + \sigma \approx 20{,}394$.
Das 2σ-Intervall ist [13; 20].
b) Es ist $\mu = 200 \cdot \frac{1}{6} = \frac{100}{3} \approx 33{,}333$, $\sigma = \sqrt{200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{250}{9}} \approx 5{,}270 > 3$, $\mu - \sigma \approx 28{,}063$ und $\mu + \sigma \approx 38{,}603$.
Das 2σ-Intervall ist [29; 38].
c) Es ist $\mu = 400 \cdot \frac{1}{6} = \frac{200}{3} \approx 66{,}667$, $\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{500}{9}} \approx 7{,}454 > 3$, $\mu - \sigma \approx 59{,}213$ und $\mu + \sigma \approx 74{,}121$.
Das 2σ-Intervall ist [60; 74].
d) Es ist $\mu = 1000 \cdot \frac{1}{6} = \frac{500}{3} \approx 166{,}667$, $\sigma = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{1250}{9}} \approx 11{,}785 > 3$, $\mu - \sigma \approx 154{,}882$ und $\mu + \sigma \approx 178{,}452$.
Das 2σ-Intervall ist [155; 178].

9

Es ist $\mu = n \cdot p$. Bei festem p und wachsendem n wächst somit auch μ.
Außerdem ist $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$. Bei festem p bleibt auch $1 - p$ fest. Wenn n wächst, wächst auch $n \cdot p \cdot (1 - p)$ und damit auch $\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

10

a) Es ist $n \cdot p = 6$, also $n = \frac{6}{p}$. Mit $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{3}$ ergibt sich die Gleichung $6 \cdot (1-p) = 3$ mit der Lösung $p = \frac{1}{2}$. Es folgt $n = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$.

b) Es ist $n \cdot p = 13{,}5$, also $n = \frac{13{,}5}{p}$. Mit $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{9{,}45}$ ergibt sich die Gleichung $13{,}5 \cdot (1-p) = 9{,}45$ mit der Lösung $p = 0{,}3$. Es folgt $n = \frac{13{,}5}{0{,}3} = 45$.

c) Es ist $n \cdot p = \frac{100}{3}$, also $n = \frac{\frac{100}{3}}{p}$. Mit $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{2}$ ergibt sich die Gleichung $\frac{100}{3} \cdot (1-p) = \frac{100}{9} \cdot 2$ mit der Lösung $p = \frac{1}{3}$. Es folgt $n = \frac{\frac{100}{3}}{\frac{1}{3}} = 100$.

11

Da das Histogramm (2) breiter ist als (1) und σ bei A größer als bei B, gehört A zu (2) und B zu (1).

A:

Der Ansatz $3{,}35 = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ und $n \cdot p = 15$ führt auf $3{,}35 = \sqrt{15 \cdot (1-p)}$. Daraus folgt $1 - p \approx 0{,}7482$.

Also ist $p \approx 0{,}25$ und $n \approx \frac{15}{0{,}25} = 60$.

B:

Der Ansatz $2{,}45 = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ und $n \cdot p = 15$ führt auf $2{,}45 = \sqrt{15 \cdot (1-p)}$. Daraus folgt $1 - p \approx 0{,}400$.

Also ist $p \approx 0{,}6$ und $n \approx \frac{15}{0{,}6} = 25$.

12

Es ist $n \cdot p = 40$, also $n = \frac{40}{p}$. Mit $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{8}$ ergibt sich die Gleichung $40 \cdot (1-p) = 8$ mit der Lösung $p = 0{,}8$. Es folgt $n = \frac{40}{0{,}8} = 50$.

13

Es ist $n \cdot p = 10$, also $n = \frac{10}{p}$. Mit $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 3$ ergibt sich die Gleichung $10 \cdot (1-p) = 3$ mit der Lösung $p = 0{,}7$. Es folgt $n = \frac{10}{0{,}7} = \frac{100}{7}$. Da dies keine natürliche Zahl ist, kann es keine binomialverteilte Zufallsgröße mit diesen Kenngrößen geben.

14

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^n$

$P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} \cdot 0{,}5^{n-k} \cdot 0{,}5^{n-(n-k)} = \binom{n}{n-k} \cdot 0{,}5^n$

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus n Objekten auszuwählen. Bei jeder Wahl bleiben $n - k$ Objekte übrig. Also ist die Anzahl der Möglichkeiten, $n - k$ Objekte aus n Objekten auszuwählen, gleich groß wie die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus n Objekten auszuwählen. Das heißt, es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(Mithilfe der Formel für den Binomialkoeffizienten ergibt sich

$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$.)

Damit ist das Histogramm achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

15

Da μ ganzzahlig ist, ist μ der Wert mit der höchsten Wahrscheinlichkeit. Also ist $\mu = 20$.

Durch Addition erhält man $P(17 \le X \le 23) \approx 0{,}079 + 0{,}091 + 0{,}098 + 0{,}099 + 0{,}095 + 0{,}085 + 0{,}072 = 0{,}619$ und $P(16 \le X \le 24) \approx 0{,}064 + 0{,}079 + 0{,}091 + 0{,}098 + 0{,}099 + 0{,}095 + 0{,}085 + 0{,}072 + 0{,}058 = 0{,}741$.

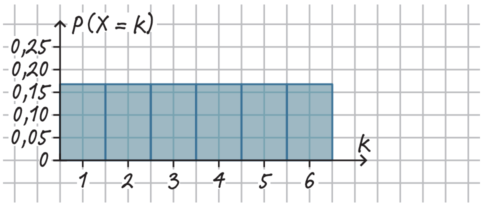
Aufgrund der Sigma-Regeln sind $\sigma_1 = 3$ und $\sigma_2 = 4$ möglich.

Im ersten Fall ergibt sich $\mu = n_1 \cdot p_1 = 20$, also $n_1 = \frac{20}{p_1}$. Mit $\sqrt{n_1 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)} = 3$ ergibt sich die Gleichung $20 \cdot (1 - p_1) = 9$ mit der Lösung $p_1 = 0{,}55$. Es folgt $n_1 = \frac{20}{0{,}55} \approx 36{,}36$. Da dies keine natürliche Zahl ist, ist σ_1 nicht möglich.

Im zweiten Fall ergibt sich $\mu = n_2 \cdot p_2 = 20$, also $n_2 = \frac{20}{p_2}$. Mit $\sqrt{n_2 \cdot p_2 \cdot (1 - p_2)} = 4$ ergibt sich die Gleichung $20 \cdot (1 - p_2) = 16$ mit der Lösung $p_2 = 0{,}2$. Es folgt $n_2 = \frac{20}{0{,}2} = 100$. Somit ist $n = 100$ und $p = 0{,}2$.

16

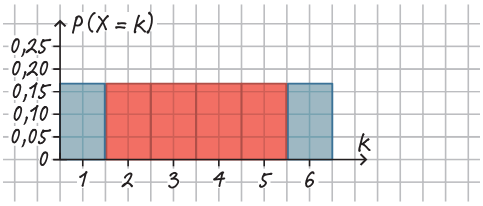
a)



b) $\mu = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$

$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot (1 - 3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2 - 3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (3 - 3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (4 - 3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (5 - 3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (6 - 3{,}5)^2} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}708$

c)



σ-Intervall: $P(2 \le X \le 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2σ-Intervall: $P(1 \le X \le 6) = 1$

3σ-Intervall: $P(1 \le X \le 6) = 1$

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5