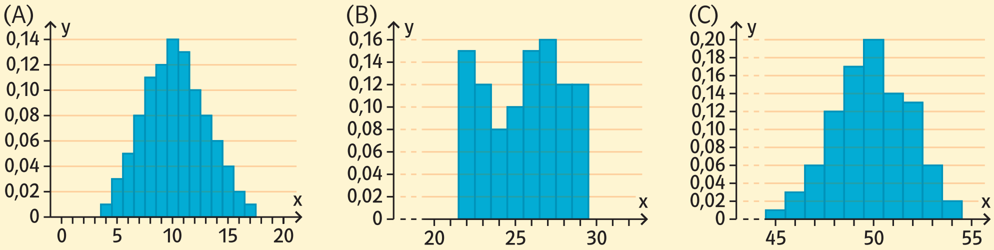
Modellieren mit der Normalverteilung

Kann man die Daten sinnvoll durch eine Normalverteilung modellieren? Wenn ja, welche Werte würden Sie für μ und σ wählen?



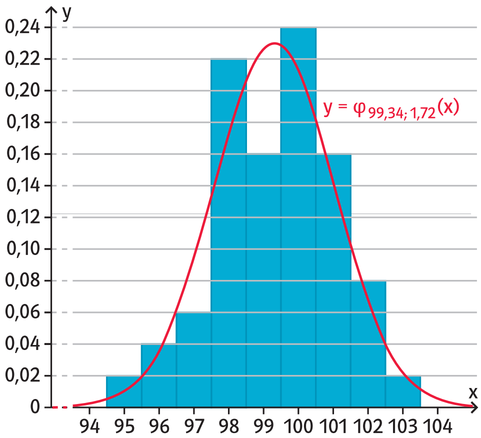
Wenn Daten mit annähernd glockenförmiger Häufigkeitsverteilung vorliegen, kann man sie **mithilfe einer passenden Normalverteilung modellieren**. Dabei nimmt man das arithmetische Mittel $\bar{x}$ als Erwartungswert μ und die empirische Standardabweichung s als Standardabweichung σ. Aus gegebenen Daten $x_1, x_2, \ldots x_n$ berechnet man mithilfe der bekannten Formel

$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ das arithmetische Mittel. Mit $s = \sqrt{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2)}$

berechnet man die empirische Standardabweichung. Sie ist also die Wurzel der mittleren quadratischen Abweichungen der Werte vom arithmetischen Mittel, so wie σ die Wurzel der mittleren quadratischen Abweichungen vom Erwartungswert ist.

Die empirische Standardabweichung wird je nach statistischem Zweck unterschiedlich definiert. Man benutzt auch die Formel $\sqrt{\frac{1}{n-1}((x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2)}$.

Eine Firma gibt für ihre Pralinenpackungen der Sorte „Bacio fine" an, dass sie mit 100 g feinen Pralinen gefüllt sind. Bei einer Stichprobe von 50 Packungen ermittelt ein Abnehmer die im Histogramm rechts dargestellte Verteilung. Dabei wurde auf ein Gramm genau gewogen. Auf der x-Achse sind die gemessenen Massen (in Gramm) und auf der y-Achse die zugehörigen relativen Häufigkeiten abgetragen. Jede Säule hat die Breite 1 und als Höhe die zugehörige relative Häufigkeit.
Das arithmetische Mittel der Daten beträgt $\bar{x} = 99{,}34$ und die empirische Standardabweichung $s \approx 1{,}72$.



Für die Modellierung wählt man eine normalverteilte Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert $\mu = 99{,}34$ und der Standardabweichung $\sigma = 1{,}72$. Die zugehörige Gauß'sche Glockenkurve ist in obigem Koordinatensystem rot eingezeichnet. Da im Histogramm die Breiten der Rechtecke 1 sind, ist die Maßzahl des Flächeninhalts jedes Rechtecks gleich der relativen Häufigkeit der zugehörigen Masse. Analog entsprechen die Maßzahlen der Flächeninhalte unter der Glockenkurve den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

Die Berechnung von $\bar{x}$ und s wird in Beispiel 2 erklärt.

In der Modellierung beschreibt X die Masse der Pralinen in einer Packung in Gramm. Damit kann man beispielsweise einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass die Pralinen in einer zufällig ausgewählten Packung weniger als 98 g wiegen:

$$P(X < 98) = \int_{-\infty}^{98} \varphi_{99,34;\,1,72}(x)\,dx \approx 0{,}218.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt gemäß dieser Modellierung also etwa 21,8 %.
Bei einer anderen Stichprobe können sich natürlich andere Werte für $\bar{x}$ und s ergeben, was die Modellierung durch eine andere Zufallsgröße zur Folge hätte.

1 **(Es ist sinnvoll, wenn bereits die Einheit „Der Satz von de Moivre-Laplace" behandelt wurde.)**

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

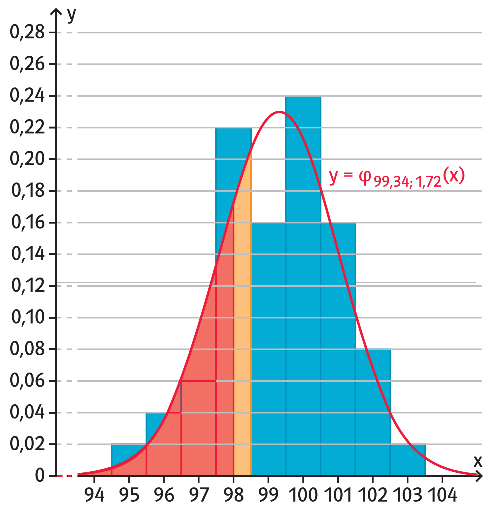
Daten mit annähernd glockenförmiger Häufigkeitsverteilung kann man **mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße X modellieren**. Dabei werden das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s der Daten als Werte für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X verwendet.

Stetigkeitskorrektur

Oben wurde die Wahrscheinlichkeit, dass die Pralinen in einer zufällig ausgewählten Packung weniger als 98 g wiegen, als Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{98} \varphi_{99,34;\,1,72}(x)\,dx$ berechnet.

Betrachtet man jedoch die zugehörige Fläche (rot), so erkennt man, dass die zum Wert 98 g gehörende Säule nur teilweise bedeckt ist. Eigentlich endet sie beim Wert 98,5. Dies berücksichtigt die **Stetigkeitskorrektur**. Hierbei wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{98,5} \varphi_{99,34;\,1,72}(x)\,dx$ berechnet.

Die zugehörige Fläche enthält auch das orange markierte Stück.



Wenn ganzzahlige Daten durch eine normalverteilte Zufallsgröße X modelliert werden, so verwendet man die **Stetigkeitskorrektur**.
Einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen a und b annimmt, berechnet man mit $P(a - 0{,}5 \le X \le b + 0{,}5) \approx \int_{a-0,5}^{b+0,5} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx$.

$\bar{x}$ und s bei relativen Häufigkeiten

Manchmal sind Daten so gegeben, dass zu jedem Wert seine relative Häufigkeit notiert ist.
Man kann $\bar{x}$ und s auch daraus direkt bestimmen. Wenn man von fünf Daten x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5 ausgeht, wobei beispielsweise der Wert a_1 dreimal vorkommt $(a_1 = x_1 = x_2 = x_4)$ und der Wert a_2 zweimal $(a_2 = x_3 = x_5)$, so vereinfacht sich die Formel für das arithmetische Mittel wie folgt:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \tfrac{1}{5}(a_1 + a_1 + a_2 + a_1 + a_2) = \tfrac{3}{5}a_1 + \tfrac{2}{5}a_2.$$

Man multipliziert also jeden Wert mit seiner relativen Häufigkeit und summiert diese Produkte.
Analog ergibt sich

$$s = \sqrt{\tfrac{1}{5}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2)}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{5}((a_1 - \bar{x})^2 + (a_1 - \bar{x})^2 + (a_2 - \bar{x})^2 + (a_1 - \bar{x})^2 + (a_2 - \bar{x})^2)} = \sqrt{\tfrac{3}{5}(a_1 - \bar{x})^2 + \tfrac{2}{5}(a_2 - \bar{x})^2}.$$

Allgemein ergeben sich damit folgende Formeln:
Sind die Daten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ mit den relativen Häufigkeiten $h_1, h_2, \ldots, h_k$ gegeben (d. h., a_i tritt mit der Häufigkeit h_i auf (vgl. Beispiel 1b)), so erhält man das arithmetische Mittel bzw. die empirische Standardabweichung durch
$\bar{x} = h_1 \cdot a_1 + h_2 \cdot a_2 + \ldots + h_k \cdot a_k$ bzw.

$$s = \sqrt{h_1 \cdot (a_1 - \bar{x})^2 + h_2 \cdot (a_2 - \bar{x})^2 + \ldots + h_k \cdot (a_k - \bar{x})^2}.$$

Mithilfe des WTR oder anderer digitaler Hilfsmittel lassen sich $\bar{x}$ und s direkt bestimmen, wenn man die Daten und gegebenenfalls die relativen Häufigkeiten als Listen eingibt.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Beispiel 1 **Arithmetisches Mittel und empirische Standardabweichung berechnen**
Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung der Noten.

a) 2; 4; 3; 1; 3; 2; 3; 4

b)

Note	1	2	3	4	5	6
Anteil	16 %	29 %	25 %	22 %	8 %	0 %

Lösung

a) $\overline{x} = \frac{2+4+3+1+3+2+3+3}{8} = \frac{22}{8} = 2{,}75$

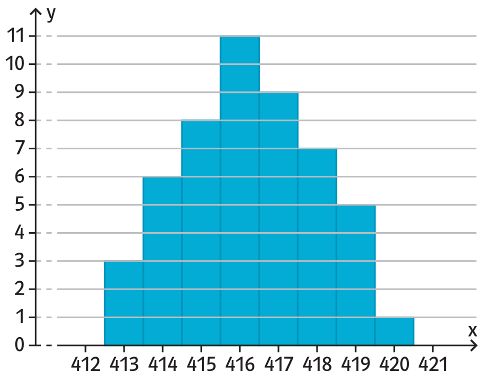
$s = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (2 \cdot (2-2{,}75)^2 + 2 \cdot (4-2{,}75)^2 + 3 \cdot (3-2{,}75)^2 + (1-2{,}75)^2)} = \sqrt{\frac{7{,}5}{8}} \approx 0{,}968$

b) $\overline{x} = 1 \cdot 0{,}16 + 2 \cdot 0{,}29 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}22 + 5 \cdot 0{,}08 = 2{,}77$

$s = \sqrt{(1-2{,}77)^2 \cdot 0{,}16 + (2-2{,}77)^2 \cdot 0{,}29 + (3-2{,}77)^2 \cdot 0{,}25 + (4-2{,}77)^2 \cdot 0{,}22 + (5-2{,}77)^2 \cdot 0{,}08}$

$= \sqrt{1{,}4171} \approx 1{,}190$

Beispiel 2 **Stetigkeitskorrektur bei ganzzahligen Werten anwenden**
Bei einer Stichprobe von 50 Packungen Pistazien eines Herstellers wurde die Anzahl der Pistazien pro Packung untersucht. Das Diagramm rechts zeigt die Verteilung.



a) Modellieren Sie die Daten durch eine normalverteilte Zufallsgröße. Skizzieren Sie ein Histogramm mit den relativen Häufigkeiten und die zugehörige Glockenkurve.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung mindestens 415 und höchstens 417 Pistazien enthält, und vergleichen Sie dies mit dem Anteil in der Stichprobe.

Lösung

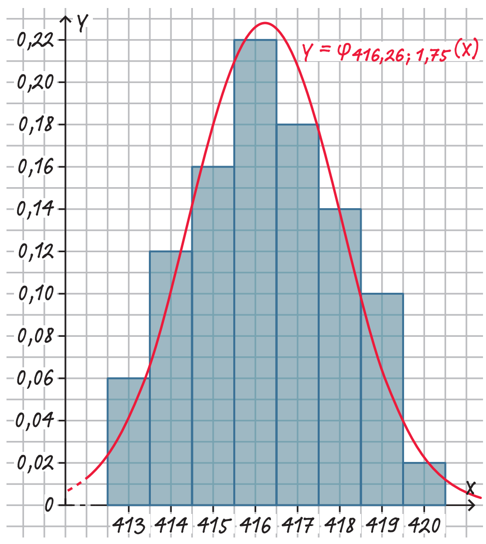
a) $\overline{x} = \frac{3}{50} \cdot 413 + \frac{6}{50} \cdot 414 + \ldots + \frac{1}{50} \cdot 420$

$= 416{,}26$ und

$s = \sqrt{\frac{3}{50} \cdot (413 - \overline{x})^2 + \ldots + \frac{1}{50} \cdot (420 - \overline{x})^2}$

$\approx 1{,}75.$

Die Anzahl der Pistazien in einer Packung wird modelliert durch die normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 416{,}26$ und $\sigma = 1{,}75$.
Glockenkurve: vgl. Abbildung rechts.



a) Da die Anzahl der Pistazien ganzzahlig ist, verwendet man die Stetigkeitskorrektur, und es ergibt sich

$P(414{,}5 \le X \le 417{,}5) \approx \int_{414{,}5}^{417{,}5} \varphi_{416{,}26;\,1{,}75}(x)\,dx$

$\approx 0{,}603.$

Anteil in der Stichprobe: $\frac{28}{50} = 0{,}56.$

Aufgaben

○ **1** Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung der Daten.

a) 52; 48; 47; 48; 48; 50

b) 2,3; 5,6; 3,0; 3,2; 2,8; 2,5; 3,2; 2,5; 0,8

c)

Wert	25	26	27	28	29	30
Anteil	18 %	16 %	22 %	20 %	15 %	9 %

d)

Wert	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Anteil	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

○ **2** Von einer Lieferung Fahrradspeichen wurde bei einer Stichprobe von zehn Speichen die Länge (in mm) gemessen. Die Ergebnisse sind:
269; 274; 269; 268; 272; 270; 269; 270; 268; 271.

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung.

b) Modellieren Sie die Daten durch eine normalverteilte Zufallsgröße und bestimmen Sie damit einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Speiche eine Länge von mehr als 270 mm hat.

○ **3** **a)** Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung der Werte in der Tabelle.

Wert	3	4	5	6	7
Anteil	5 %	24 %	34 %	31 %	6 %

b) Modellieren Sie die Daten durch eine normalverteilte Zufallsgröße und bestimmen Sie damit näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert höchstens 5 ist. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit den Anteilen in der Tabelle.

○ Test

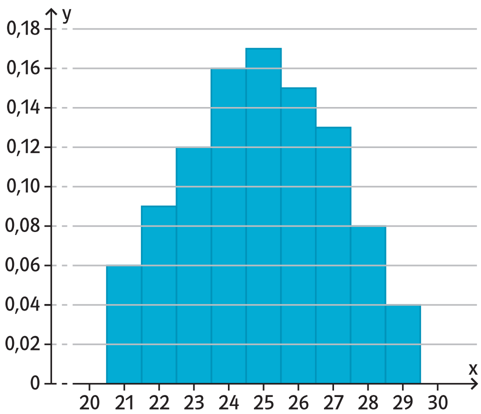
4 Von einer Sorte Kaffeebohnen wurden 100 entnommen und gewogen. Die Tabelle zeigt die Verteilung der Massen (in Gramm).

Wert	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Anteil	7	15	19	20	17	12	7	3

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung.

b) Modellieren Sie die Masse einer Bohne durch eine normalverteilte Zufallsgröße. Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bohne mindestens 0,5 g und höchstens 0,7 g wiegt. Vergleichen Sie mit den relativen Häufigkeiten in der Stichprobe.

◒ **5** Ein Gärtner pflanzt eine neue Sorte Salatgurken an. Von der ersten Ernte nimmt er 100 Stück und misst ihre Länge (in cm). Das Histogramm zeigt die jeweiligen relativen Häufigkeiten.



a) Modellieren Sie die Daten durch eine normalverteilte Zufallsgröße.

b) Übertragen Sie das Histogramm ins Heft, skizzieren Sie die zugehörige Gauß'sche Glockenkurve und beurteilen Sie die Güte der Modellierung.

c) Markieren Sie in der Zeichnung aus Teilaufgabe b) die Fläche, die der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass eine zufällig ausgewählte Gurke gemäß dieser Modellierung zwischen 25 cm und 27 cm lang ist, und vergleichen Sie diese mit der Fläche, die der entsprechenden relativen Häufigkeit entspricht.

◒ **6** Die Schuhgrößen von 200 zufällig ausgewählten Männern wurden bestimmt. Die Tabelle zeigt die Verteilung.

Schuhgröße	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Anzahl	8	14	28	36	38	33	23	13	7

a) Modellieren Sie die Daten durch eine normalverteilte Zufallsgröße.

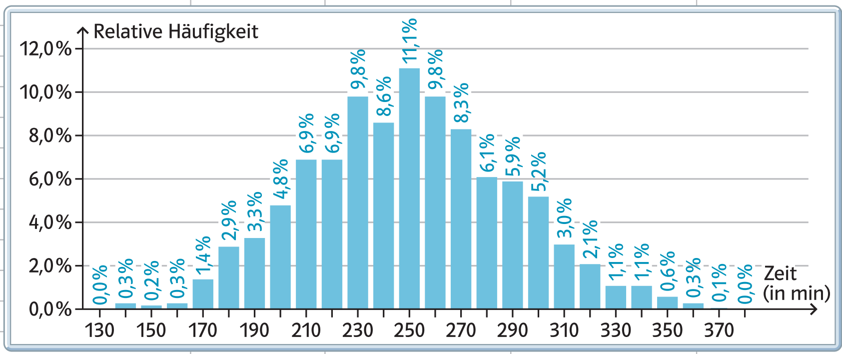
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mann mindestens Schuhgröße 44 hat.

c) In einem Schuhgeschäft befinden sich zwölf Männer. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens fünf darunter mindestens Schuhgröße 44 haben.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

7 Das Diagramm zeigt die Verteilung der Laufzeiten beim Köln-Marathon.



	A	B	C	D	E
13	Stichprobenzahl	1464			
14	Mittelwert	250			
15	Standardabweichung	40			
16					

a) Beschreiben Sie, wie man mithilfe des Säulendiagramms das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung bestimmen kann.

b) Die Daten werden durch eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 250$ und $\sigma = 40$ modelliert. Berechnen Sie damit die folgenden Wahrscheinlichkeiten und vergleichen Sie diese mit den Daten aus dem Diagramm.
(1) $P(235 < X \leq 265)$ (2) $P(X \leq 205)$ (3) $P(245 < X < 255)$

c) Ermitteln Sie im Modell das kleinste zu $\mu = 250$ symmetrische Intervall mit ganzzahligen Endzahlen, in dem mindestens 60% aller Laufzeiten liegen. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit den Informationen im Diagramm.

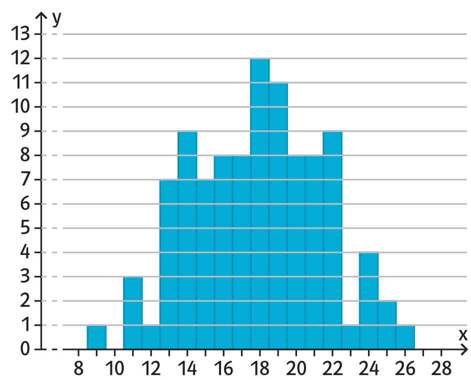
Test

8 Es wurden 100-mal fünf Würfel geworfen. Das Histogramm zeigt die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Augensummen.

a) Modellieren Sie die Daten durch eine normalverteilte Zufallsgröße X.

b) Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens die Augensumme 20 zu erzielen.

c) Ermitteln Sie ein möglichst kleines zum Erwartungswert von X symmetrisches Intervall mit ganzzahliger Länge, dessen Wahrscheinlichkeit mindestens 90% beträgt.



9 Vor einer Schule wurden die Geschwindigkeiten von 2584 Autos gemessen.
Die Tabelle zeigt die Messwerte in verschiedenen Geschwindigkeitsbereichen. Wenn ein Auto schneller als $55\,\frac{km}{h}$ gefahren ist, wird ein Bußgeld erhoben. Ermitteln Sie mithilfe einer Modellierung einen Näherungswert für den Anteil der Fahrer, die ein Bußgeld bezahlen müssen.

Geschwindigkeit v $\left(\text{in } \frac{km}{h}\right)$	Relative Häufigkeit
$20 \leq v < 30$	15,8%
$30 \leq v < 40$	27,4%
$40 \leq v < 50$	30,4%
$50 \leq v < 80$	26,4%

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

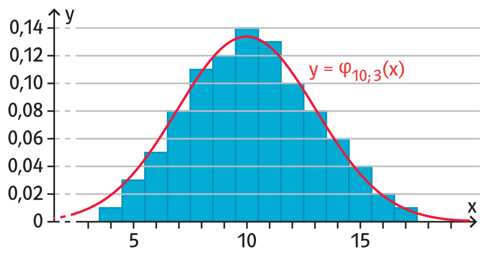
Lösungen

Einstiegsaufgabe

Die folgenden Skizzen sind in der Aufgabenstellung nicht verlangt. Sie dienen der Veranschaulichung der Modellierung.

(A) Ja, da das Histogramm Glockenform hat.

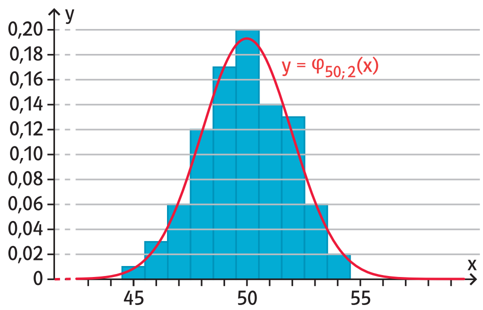
$\mu = 10$, $\sigma = 3$



(B) Nein, da das Histogramm keine Glockenform hat.

(C) Möglich, da das Histogramm ungefähr Glockenform hat.

$\mu = 50$, $\sigma = 2$



1

a) $\bar{x} = \frac{52 + 48 + 47 + 48 + 48 + 50}{6} \approx 48{,}833$

$s = \sqrt{\frac{1}{6}((52 - \bar{x})^2 + (48 - \bar{x})^2 + \ldots + (50 - \bar{x})^2)} \approx 1{,}675$

b) $\bar{x} \approx 2{,}878$, $s \approx 1{,}182$

c) $\bar{x} = 0{,}18 \cdot 25 + 0{,}16 \cdot 26 + 0{,}22 \cdot 27 + 0{,}2 \cdot 28 + 0{,}15 \cdot 29 + 0{,}09 \cdot 30 = 27{,}25$

$s = \sqrt{0{,}18 \cdot (25 - \bar{x})^2 + 0{,}16 \cdot (26 - \bar{x})^2 + 0{,}22 \cdot (27 - \bar{x})^2 + 0{,}2 \cdot (28 - \bar{x})^2 + 0{,}15 \cdot (29 - \bar{x})^2 + 0{,}09 \cdot (30 - \bar{x})^2} \approx 1{,}558$

d) $\bar{x} = 0{,}12$, $s \approx 0{,}618$

2

a) $\bar{x} = 270$, $s \approx 1{,}789$

b) Modellierung durch die normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 270$ und $\sigma = 1{,}789$.

Da die Messungen alle auf ganze mm gerundet sind, folgt mit der Stetigkeitskorrektur

$P(X > 269{,}5) = 1 - P(X \le 269{,}5) \approx 1 - \int_{-\infty}^{269{,}5} \varphi_{270;\,1{,}789}(x)\,dx = \int_{269{,}5}^{\infty} \varphi_{270;\,1{,}789}(x)\,dx \approx 0{,}610.$

3

a) $\bar{x} = 5{,}09$, $s \approx 0{,}991$

b) Modellierung durch die normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 5{,}09$ und $\sigma = 0{,}991$.

Mit Stetigkeitskorrektur ergibt sich $P(X \le 5{,}5) \approx \int_{-\infty}^{5{,}5} \varphi_{5{,}09;\,0{,}991}(x)\,dx \approx 0{,}660$.

Der Anteil in der Tabelle beträgt 5 % + 24 % + 34 % = 63 %.

Die Näherung ist brauchbar.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

4

a) $\bar{x} = 0{,}604$, $s \approx 0{,}178$

b) Modellierung durch die normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 0{,}604$ und $\sigma = 0{,}178$.

Mit der Stetigkeitskorrektur ergibt sich $P(0{,}45 \le X \le 0{,}75) \approx \int_{0{,}45}^{0{,}75} \varphi_{0{,}604;\,0{,}178}(x)\,dx \approx 0{,}600$.

Der Anteil in der Tabelle beträgt $\frac{19 + 20 + 17}{100} = 56\,\%$.

Die Näherung ist brauchbar.

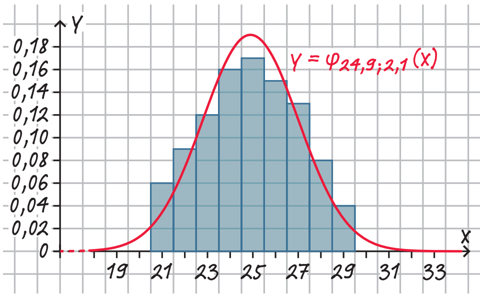
5

a) $\bar{x} = \frac{21 \cdot 0{,}06 + 22 \cdot 0{,}09 + 23 \cdot 0{,}12 + 24 \cdot 0{,}16 + 25 \cdot 0{,}17 + 26 \cdot 0{,}15 + 27 \cdot 0{,}13 + 28 \cdot 0{,}08 + 9 \cdot 0{,}04}{100} = 24{,}9$ und

$s = \sqrt{0{,}06 \cdot (21 - \bar{x})^2 + 0{,}09 \cdot (22 - \bar{x})^2 + 0{,}12 \cdot (23 - \bar{x})^2 + 0{,}16 \cdot (24 - \bar{x})^2 + 0{,}17 \cdot (25 - \bar{x})^2 + 0{,}15 \cdot (26 - \bar{x})^2 + 0{,}13 \cdot (27 - \bar{x})^2 + 0{,}08 \cdot (28 - \bar{x})^2 + 0{,}04 \cdot (29 - \bar{x})^2} \approx 2{,}10$

Man modelliert also durch eine normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 24{,}9$ und $\sigma = 2{,}1$.

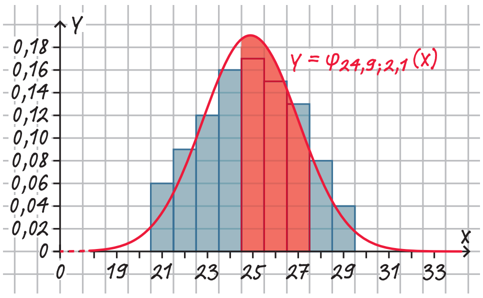
b)



Die Modellierung passt insgesamt relativ gut. Im Intervall [24; 26] sind die Werte etwas zu groß, in den Intervallen [−∞; 22] und [27; ∞] etwas zu klein.

Wenn man rechnerisch das Intervall [22,5; 27,5] überprüft, erhält man $P(22{,}5 \le X \le 27{,}5) \approx 0{,}766$; die relative Häufigkeit ist laut Diagramm 0,73.

c)



Die Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve ist etwas größer als die von den drei Säulen bedeckte. (Rechnerisch ergibt sich ca. 0,468 gegenüber 0,45.)

6

a) $\bar{x} = 42{,}9$ und $s \approx 1{,}94$, also Modellierung durch eine normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 42{,}9$ und $\sigma = 1{,}94$

b) Mit Stetigkeitskorrektur: $P(X \ge 43{,}5) = 1 - P(X < 43{,}5) \approx 1 - \int_{-\infty}^{43{,}5} \varphi_{42{,}9;\,1{,}94}(x)\,dx = \int_{43{,}5}^{-\infty} \varphi_{42{,}9;\,1{,}94}(x)\,dx \approx 0{,}379$.

c) 1. Möglichkeit: Mit der Modellierung durch X.

Y ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = 0{,}379$.

$P(Y \ge 5) = 1 - P(Y < 5) \approx 0{,}501$

2. Möglichkeit: Mit dem Anteil in der Stichprobe.

Z ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = \frac{76}{200} = 0{,}38$.

$P(Z \ge 5) \approx 0{,}504$

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

7

a) Um das arithmetische Mittel $\bar{x}$ zu bestimmen, multipliziert man jede Zeit auf der horizontalen Achse mit dem Prozentsatz, der an der zugehörigen Säule steht. Diese Produkte werden dann addiert.
Zur Berechnung der Standardabweichung s bildet man von jeder Zeit die Differenz zu $\bar{x}$, quadriert diese und multipliziert sie mit dem zugehörigen Prozentsatz. Alle diese Ergebnisse addiert man und zieht aus der Summe die Wurzel.
Als Formeln:
$\bar{x} = 0{,}003 \cdot 140 + 0{,}002 \cdot 150 + \ldots + 0{,}001 \cdot 370$
$s = \sqrt{(140 - \bar{x})^2 \cdot 0{,}003 + (150 - \bar{x})^2 \cdot 0{,}002 + \ldots + (370 - \bar{x})^2 \cdot 0{,}001}$

b) $P(235 < X \le 265) \approx \int_{235}^{265} \varphi_{250;\,40}(x)\,dx \approx 0{,}292$; tatsächlicher Anteil (aus Diagramm): 0,295.

$P(X \le 205) \approx \int_{-\infty}^{205} \varphi_{250;\,40}(x)\,dx \approx 0{,}130$; tatsächlicher Anteil (aus Diagramm): 0,132.

$P(245 < X < 255) \approx \int_{245}^{255} \varphi_{250;\,40}(x)\,dx \approx 0{,}099$; tatsächlicher Anteil (aus Diagramm): 0,111.

c) Es ist $\int_{217}^{283} \varphi_{250;\,40}(x)\,dx \approx 0{,}591$ und $\int_{216}^{284} \varphi_{250;\,40}(x)\,dx \approx 0{,}605$.

Damit ist das gesuchte Intervall [216; 284]. Im ähnlichen Bereich [215; 285] liegen laut Diagramm 60,6% aller Laufzeiten.

8

a) $\bar{x} = 17{,}86$ und $s \approx 3{,}57$, also Modellierung durch eine normalverteilte Zufallsgröße X mit $\mu = 17{,}86$ und $\sigma = 3{,}57$

b) Mit Stetigkeitskorrektur: $P(X \ge 19{,}5) = 1 - P(X < 19{,}5) \approx 1 - \int_{-\infty}^{19{,}5} \varphi_{17{,}86;\,3{,}57}(x)\,dx = \int_{19{,}5}^{-\infty} \varphi_{17{,}86;\,3{,}57}(x)\,dx \approx 0{,}323$.

c) Es ist $P(12{,}36 \le X \le 23{,}36) \approx 0{,}877$ und $P(11{,}86 \le X \le 23{,}86) \approx 0{,}907$. Also ist [11,86; 23,86] das gesuchte Intervall.

9

Da die Geschwindigkeit in Bereiche (sogenannte Klassen) eingeteilt ist, kann man mit den Klassenmitten Näherungswerte für das arithmetische Mittel und die Standardabweichung bestimmen.
$\bar{x} = 0{,}158 \cdot 25 + 0{,}274 \cdot 35 + 0{,}304 \cdot 45 + 0{,}264 \cdot 65 = 44{,}38$ und
$s = \sqrt{(25 - 44{,}38)^2 \cdot 0{,}158 + (35 - 44{,}38)^2 \cdot 0{,}274 + (45 - 44{,}38)^2 \cdot 0{,}304 + (65 - 44{,}38)^2 \cdot 0{,}264} \approx 13{,}993$
Die Daten werden mithilfe der normalverteilten Zufallsgröße X mit $\mu = 44{,}38$ und $\sigma = 13{,}993$ modelliert.

$P(X > 55) \approx \int_{55}^{\infty} \varphi_{44{,}38;\,13{,}993}(x)\,dx \approx 0{,}224$. Etwa 22% der Fahrer müssen ein Bußgeld bezahlen.

Bei dieser Modellierung wird angenommen, dass innerhalb der Bereiche die Geschwindigkeiten gleichverteilt sind. Das ist insbesondere beim letzten und größten Bereich von 50 bis 80 $\frac{km}{h}$ nicht realistisch. Man würde annehmen, dass Geschwindigkeiten knapp über 50 $\frac{km}{h}$ häufiger auftreten als höhere. Je nachdem, welche Verteilung man hier zugrunde legt, erhält man andere Werte für μ und σ.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5