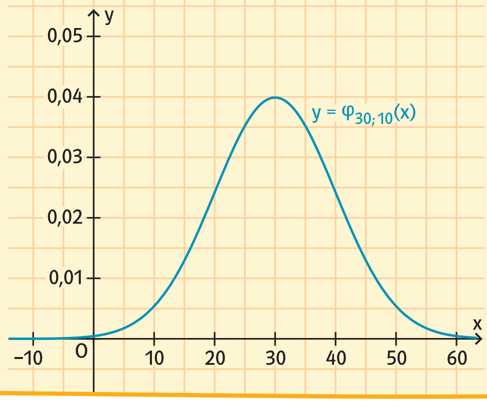
Normalverteilung und Sigma-Regeln

Gegeben ist der Graph der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit $\mu = 30$ und $\sigma = 10$.
Bestimmen Sie näherungsweise anhand der Grafik ein Intervall, das symmetrisch um μ liegt und die Wahrscheinlichkeit 0,5 hat.



Mithilfe der Sigma-Regeln lassen sich zu gewissen vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten zugehörige Datenintervalle I ermitteln.
Die geläufigsten Sigma-Regeln für eine $N_{\mu;\,\sigma}$-verteilte Zufallsgröße X sind im Merkkasten notiert. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten für Intervalle angegeben, die symmetrisch um den Erwartungswert μ liegen. In Fig. 1 finden sich die Wahrscheinlichkeiten für die σ-, 2σ- und 3σ-Umgebung um μ. Fig. 2 gibt die Intervalle um den Erwartungswert μ wieder, deren Wahrscheinlichkeiten typische Werte (90 %, 95 % und 99 %) annehmen.

Eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern μ und σ heißt $N_{\mu;\,\sigma}$-verteilt.

Für eine $N_{\mu;\,\sigma}$-verteilte Zufallsgröße gelten folgende **Sigma-Regeln**:

Intervall I	$P(X \in I)$
$[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$	$\approx 0{,}683$
$[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$	$\approx 0{,}954$
$[\mu - 3\sigma;\ \mu + 3\sigma]$	$\approx 0{,}997$

Fig. 1

Intervall I	$P(X \in I)$
$[\mu - 1{,}64\sigma;\ \mu + 1{,}64\sigma]$	$\approx 0{,}90$
$[\mu - 1{,}96\sigma;\ \mu + 1{,}96\sigma]$	$\approx 0{,}95$
$[\mu - 2{,}58\sigma;\ \mu + 2{,}58\sigma]$	$\approx 0{,}99$

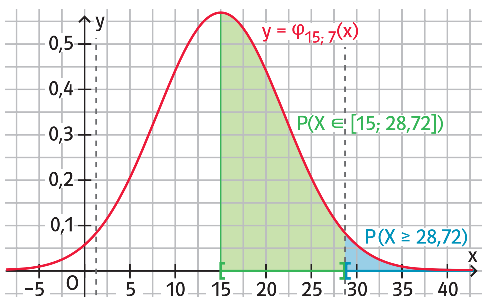
Fig. 2

Für z. B. $\mu = 15$ und $\sigma = 7$ gilt für das Intervall $[15 - 7;\ 15 + 7] = [8;\ 22]$ gemäß Fig. 1:
$P(X \in [8;\ 22]) \approx 0{,}683$.
Ist für $\mu = 15$ und $\sigma = 7$ ein um μ symmetrisches Intervall I mit $P(X \in I) \approx 0{,}95$ gesucht, so folgert man aus Fig. 2: $I = [15 - 1{,}96 \cdot 7;\ 15 + 1{,}96 \cdot 7] = [1{,}28;\ 28{,}72]$.

Es ist $P(X \in [8;\ 22]) = P(8 \le X \le 22)$.

Da der Graph der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße symmetrisch zur Geraden $x = \mu$ verläuft, lassen sich aus den Sigma-Regeln auch noch weitere Wahrscheinlichkeiten ableiten.

Aus Fig. 2 ergibt sich für die $N_{15;\,7}$-verteilte Zufallsgröße X z. B.
$P(X \in [15;\ 15 + 1{,}96 \cdot 7]) = P(X \in [15;\ 28{,}72])$
$\approx \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$
und mithilfe der Symmetrie und des Gegenereignisses
$P(X \ge 28{,}72) = \frac{1}{2} - P(X \in (15;\ 28{,}72])$
$\approx \frac{1}{2} - 0{,}475 = 0{,}025$.



Es ist
$0{,}95 \approx P(X \in [15 - 1{,}96 \cdot 7;\ 15 + 1{,}96 \cdot 7])$
$= P(X \in [15 - 1{,}96 \cdot 7;\ 15])$
$\quad + P(X \in [15;\ 15 + 1{,}96 \cdot 7])$
$= 2 \cdot P(X \in [15;\ 15 + 1{,}96 \cdot 7])$

Autor: Dr. Rebecca Roy
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Für eine $N_{\mu;\,\sigma}$-verteilte Zufallsgröße X lassen sich mit den Sigma-Regeln Intervalle zu gewissen vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten finden. Dies gelingt für Intervalle, die symmetrisch um μ liegen oder μ als eine Intervallgrenze haben oder von der Form $(-\infty; c)$ oder $(c; \infty)$ sind.

Statt $(-\infty; c)$ bzw. $(c; \infty)$ kann man auch $(-\infty; c]$ bzw. $[c; \infty)$ schreiben.

Beispiel 1 Zu vorgegebener Wahrscheinlichkeit das passende Intervall um μ finden
Geben Sie zu einer $N_{200;\,75}$-verteilten Zufallsgröße X ein Intervall I an, das symmetrisch um den Erwartungswert liegt und die angegebene Wahrscheinlichkeit hat.
a) $P(X \in I) \approx 0{,}954$ **b)** $P(X \in I) \approx 0{,}99$ **c)** $P(X \in I) \approx 0{,}90$ **d)** $P(X \in I) \approx 0{,}683$

Lösung
a) $I = [200 - 2 \cdot 75;\ 200 + 2 \cdot 75] = [50; 350]$ (2σ-Intervall um μ)
b) $I = [200 - 2{,}58 \cdot 75;\ 200 + 2{,}58 \cdot 75] = [6{,}5; 393{,}5]$ (2,58σ-Intervall um μ)
c) $I = [200 - 1{,}64 \cdot 75;\ 200 + 1{,}64 \cdot 75] = [77; 323]$ (1,64σ-Intervall um μ)
d) $I = [200 - 75;\ 200 + 75] = [125; 275]$ (σ-Intervall um μ)

Beispiel 2 Zu vorgegebener Wahrscheinlichkeit ein Intervall finden
Bestimmen Sie zu einer $N_{300;\,60}$-verteilten Zufallsgröße X die Zahl c so, dass das Intervall die angegebene Wahrscheinlichkeit hat.
a) $P(X \in [300; c]) \approx 0{,}45$ **b)** $P(X \in (-\infty; c]) \approx 0{,}05$
c) $P(X \in [c; 300)) \approx 0{,}3415$ **d)** $P(X \in [c, \infty)) \approx 0{,}1585$

Lösung
a) Gemäß Fig. 2 im Merkkasten auf Seite 1 ist $P(X \in [201{,}6; 398{,}4]) \approx 0{,}9$. Aufgrund der Symmetrie um $\mu = 300$ ist das gesuchte Intervall $[300; 398{,}4]$. Also ist $c = 398{,}4$.
b) Gemäß Fig. 2 im Merkkasten auf Seite 1 ist $P(X \in [201{,}6; 398{,}4]) \approx 0{,}9$. Aufgrund der Symmetrie um $\mu = 300$ folgt mit dem Gegenereignis $P(X \in (-\infty; 201{,}6]) \approx \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$. Also ist $c = 201{,}6$.
c) Gemäß Fig. 1 im Merkkasten auf Seite 1 ist $P(X \in [240; 360]) \approx 0{,}683$. Aufgrund der Symmetrie um $\mu = 300$ ist das gesuchte Intervall $[240; 300)$. Also ist $c = 240$.
d) Gemäß Fig. 1 im Merkkasten auf Seite 1 ist $P(X \in [240; 360]) \approx 0{,}683$. Aufgrund der Symmetrie um $\mu = 300$ folgt mit dem Gegenereignis $P(X \in [360, \infty)) \approx \frac{1 - 0{,}683}{2} = 0{,}1585$. Also ist $c = 360$.

Aufgaben

○ **1** Geben Sie zur $N_{500;\,100}$-verteilten Zufallsgröße X ein Intervall I an, das symmetrisch um $\mu = 500$ liegt und die angegebene Wahrscheinlichkeit hat.
a) $P(X \in I) \approx 0{,}683$ **b)** $P(X \in I) \approx 0{,}99$ **c)** $P(X \in I) \approx 0{,}95$
d) $P(X \in I) \approx 0{,}997$ **e)** $P(X \in I) \approx 0{,}954$ **f)** $P(X \in I) = 1$

○ **2** Die Lebenszeit einer Glühbirne lässt sich mit einer $N_{2500;\,500}$-verteilten Zufallsgröße X modellieren (alle Angaben in h). Bestimmen Sie mithilfe der Sigma-Regeln die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Ereignisses.
a) A: Die Glühbirne brennt zwischen 2000 und 3000 Stunden.
b) B: Die Glühbirne brennt mehr als 3500 Stunden.
c) C: Die Glühbirne brennt weniger als 1000 Stunden.

○ **3** Das Gewicht einer Tafel Schokolade ist normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 1$ (alle Angaben in g). Bestimmen Sie mithilfe der Sigma-Regeln die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Ereignisses.
a) A: Die Tafel Schokolade wiegt 103 g oder mehr.
b) B: Die Tafel Schokolade wiegt zwischen 100 g und 102 g.
c) C: Die Tafel Schokolade wiegt weniger als 98 g.
d) D: Die Tafel Schokolade wiegt zwischen 101 g und 103 g.

Autor: Dr. Rebecca Roy
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Test

4 Bestimmen Sie für eine $N_{735;\,50}$-verteilte Zufallsgröße mithilfe der Sigma-Regeln ein Intervall I mit der gegebenen Wahrscheinlichkeit.

a) $P(X \in I) \approx 0{,}95$ **b)** $P(X \in I) \approx 0{,}997$

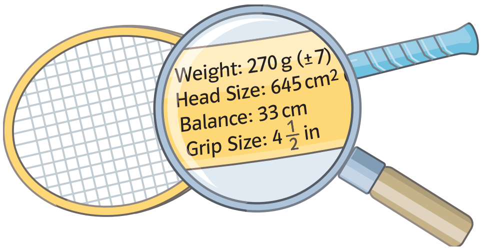
5 Bestimmen Sie für eine $N_{200;\,30}$-verteilte Zufallsgröße X die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

a) $P(X \in [170;\,230])$ **b)** $P(X \in (110;\,170))$ **c)** $P(X \in (170;\,260])$

6 Bestimmen Sie zu einer $N_{70;\,7}$-verteilten Zufallsgröße X die Zahl c so, dass das Intervall die angegebene Wahrscheinlichkeit hat.

a) $P(X \in [70;\,c)) \approx 0{,}475$ b) $P(X \in (-\infty;\,c]) \approx 0{,}025$
c) $P(X \in (c;\,\infty)) \approx 0{,}005$ d) $P(X \in [c;\,70)) \approx 0{,}4985$

7 Ein Hersteller von Tennisschlägern gibt auf seinen Schlägern deren Gewicht mit 270 g (±7) an. Das Gewicht dieser Tennisschläger wird als normalverteilt angenommen.
Wie groß muss die Standardabweichung σ sein, damit 95 % der produzierten Schläger in dem vom Hersteller genannten Toleranzbereich um den Erwartungswert liegen?



8 Bestimmen Sie zur normalverteilten Zufallsgröße X mit $\mu = 290$ die Standardabweichung σ so, dass die Aussage gilt.

a) Das Intervall $[290 - 11;\ 290 + 11]$ hat die Wahrscheinlichkeit 0,99.
b) Das Intervall $[310;\,\infty)$ hat die Wahrscheinlichkeit 0,0225.
c) $P(|X - 290| < 30) \approx 0{,}95$ d) $P(|X - 290| > 47) \approx 0{,}1$
e) $P(X \in (-\infty;\,29)) \approx 0{,}025$ f) $P(X \notin (245;\,335)) \approx 0{,}003$

9 Bestimmen Sie zur normalverteilten Zufallsgröße X mit der Standardabweichung $\sigma = 200$ den Erwartungswert μ so, dass die Aussage gilt.

a) $P(X \in [\mu;\,492]) \approx 0{,}475$ b) $P(X \in (35;\,\mu]) \approx 0{,}3415$
c) $P(X \in [157;\,\infty)) \approx 0{,}025$ d) $P(X \in (730;\,1130]) \approx 0{,}477$
e) $P(X \in [150;\,550)) \approx 0{,}157$ f) $P(X \in [8429;\,\infty)) \approx 0{,}05$

Test

10 Bestimmen Sie zur $N_{321;\,\sigma}$-verteilten Zufallsgröße X den Wert von σ so, dass die Aussage gilt.

a) $P(X \in [-\infty;\,419)) \approx 0{,}975$ **b)** $P(X \in (301;\,331]) \approx 0{,}8185$

11 Bestimmen Sie μ so, dass für die $N_{\mu;\,150}$-verteilte Zufallsgröße X gilt: $P(X \in (400;\,\infty)) \approx 0{,}95$.

12 Erläutern Sie, dass die Sigma-Regeln für alle Werte der Parameter μ und σ einer normalverteilten Zufallsgröße gelten.

Tipp:
Hier muss mit der Dichtefunktion der Normalverteilung gearbeitet werden.

13 Eine Normalverteilung mit den Parameterwerten $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt **Standardnormalverteilung**.

a) Finden Sie für eine standardnormalverteilte Zufallsgröße X eine Zahl △ (auf zwei Nachkommastellen gerundet), sodass $P(X \in [-\triangle;\ \triangle]) = 0{,}8$ ist.
b) Überprüfen Sie anhand beliebiger Werte für μ und σ, dass für die $N_{\mu;\,\sigma}$-verteilte Zufallsgröße Y und für die Zahl △ aus Teilaufgabe a) ebenfalls $P(Y \in (\mu - \triangle;\ \mu + \triangle)) = 0{,}8$ gilt.

Autor: Dr. Rebecca Roy
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

Einstiegsaufgabe

Das gesuchte Intervall ist (gerundet auf zwei Nachkommastellen) $[23{,}26;\ 36{,}74]$. (Die Intervallgrenzen können auch offen sein.)

Aus der Grafik kann man das Intervall nicht so genau wie angegeben ablesen. Lösungen wie z.B. $[23;\ 37]$ oder $[22;\ 39]$ sind möglich.

1

Hinweis:

Die Intervallgrenzen können – bis auf Teilaufgabe f) – jeweils auch offen sein.

a) $[400;\ 600]$ **b)** $[242;\ 758]$ **c)** $[304;\ 696]$

d) $[200;\ 800]$ **e)** $[300;\ 700]$ **f)** $(-\infty;\ \infty)$

2

a) $P(A) = P(X \in [\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]) \approx 0{,}683$

b) $P(B) = \frac{1 - P(X \in [\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma])}{2} \approx \frac{1 - 0{,}954}{2} = 0{,}023$

c) $P(C) = \frac{1 - P(X \in [\mu - 3\sigma;\ \mu + 3\sigma])}{2} \approx \frac{1 - 0{,}997}{2} = 0{,}0015$

3

a) $P(A) \approx \frac{1 - 0{,}997}{2} = 0{,}0015$ **b)** $P(B) \approx \frac{0{,}954}{2} = 0{,}477$

c) $P(C) \approx \frac{1 - 0{,}954}{2} = 0{,}023$ **d)** $P(D) \approx \frac{0{,}997 - 0{,}683}{2} = 0{,}157$

4

Bei den Intervallen sind auch offene Grenzen möglich.

a) $[637;\ 833]$ **b)** $[585;\ 885]$

5

a) $P(X \in [170;\ 230]) = P([\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]) \approx 0{,}683$

b) $(X \in (110;\ 170)) = \frac{P(X \in [\mu - 3\sigma;\ \mu + 3\sigma]) - P(X \in [\mu - \sigma;\ \mu + \sigma])}{2} \approx \frac{0{,}997 - 0{,}683}{2} = 0{,}157$

c) $P(X \in (170;\ 260]) = P(X \in [\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]) + \frac{P(X \in [\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]) - P(X \in [\mu - \sigma;\ \mu + \sigma])}{2}$

$\approx 0{,}683 + \frac{0{,}954 - 0{,}683}{2} = 0{,}8185$

6

a) $c = 70 + 1{,}96 \cdot 7 = 83{,}72$ **b)** $c = 70 - 1{,}96 \cdot 7 = 56{,}28$

c) $c = 70 + 2{,}58 \cdot 7 = 88{,}06$ **d)** $c = 70 - 3 \cdot 7 = 49$

7

Es muss $7 = 1{,}96 \cdot \sigma$ gelten, also $\sigma \approx 3{,}57$.

8

a) Es muss $11 = 2{,}58 \cdot \sigma$ gelten, also $\sigma \approx 4{,}26$.

b) Es muss $20 = 2 \cdot \sigma$ gelten, also $\sigma = 10$.

c) Es muss $30 = 1{,}96 \cdot \sigma$ gelten, also $\sigma \approx 15{,}31$.

d) Es muss $47 = 1{,}64 \cdot \sigma$ gelten, also $\sigma \approx 28{,}66$.

e) Es muss $290 - 29 = 261 = 1{,}96 \cdot \sigma$ gelten, also $\sigma \approx 133{,}16$.

f) Es muss $335 - 290 = 45 = 3 \cdot \sigma$ gelten, also $\sigma = 15$.

Autor: Dr. Rebecca Roy

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

9

a) Es muss gelten: $\mu + 1{,}96\sigma = 492$ (halbe $1{,}96\sigma$-Umgebung), also $\mu = 492 - 1{,}96 \cdot 200 = 100$.

b) Es muss gelten: $\mu - \sigma = 35$ (halbe σ-Umgebung), also $\mu = 35 + 200 = 235$.

c) Es muss gelten: $\mu + 1{,}96\sigma = 157$ (oberer Bereich außerhalb der $1{,}96\sigma$-Umgebung), also $\mu = 157 - 1{,}96 \cdot 200 = -235$.

d) Es gibt zwei Lösungen: Entweder ist $\mu = 730$ (obere 2σ-Umgebung) oder es ist $\mu = 1130$ (untere 2σ-Umgebung).

e) Es gibt zwei Lösungen: Wenn $[150; 550]$ das Intervall zwischen $\mu + \sigma$ und $\mu + 3\sigma$ ist, dann muss $\mu + \sigma = 150$ gelten, also $\mu = 150 - 200 = -50$. Wenn $[150; 550]$ das Intervall zwischen $\mu - 3\sigma$ und $\mu - \sigma$ ist, dann muss $\mu - \sigma = 550$ gelten, also $\mu = 550 + 200 = 750$.

f) Es muss gelten: $\mu + 1{,}64\sigma = 8429$ (oberer Bereich außerhalb der $1{,}64\sigma$-Umgebung), also $\mu = 8429 - 1{,}64 \cdot 200 = 8101$.

10

a) Es muss gelten: $\mu + 1{,}96\sigma = 419$ (Bereich von $-\infty$ bis $321 + 1{,}96\sigma$), also $\sigma = \frac{419 - 321}{1{,}96} = 50$.

b) Es muss gelten: $\mu - 2\sigma = 301$ (Bereich von $321 - 2\sigma$ bis $321 + \sigma$), also $\sigma = \frac{321 - 301}{2} = 10$.

11

Es muss gelten: $\mu - 1{,}64\sigma = 400$ (Bereich von $\mu - 1{,}64\sigma$ bis ∞), also $\mu = 400 + 1{,}64 \cdot 150 = 646$.

12

Die Dichtefunktion f einer normalverteilten Zufallsgröße entsteht aus der Dichtefunktion f_0 der Standardnormalverteilung. Dabei wird f_0 so transformiert, dass der Graph von f weiterhin symmetrisch zu $x = \mu$ verläuft, dort sein Maximum und Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$ hat und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ist.

Dass die prozentualen Flächenanteile gleich bleiben, weist man exemplarisch am Intervall $[\mu;\ \mu + \sigma]$ nach:

Es seien $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ und $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$.

Zu zeigen ist: $\int_{\mu}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx = \int_0^1 f_0(x)\,dx$.

Verschiebt man den Graphen von f in x-Richtung so, dass $\mu = 0$ ist, ändert sich der Wert des Integrals nicht.

Es ist also $\int_{\mu}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx = \int_0^{\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx$.

Es sei G eine Stammfunktion von g mit $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Dann erhält man mit linearer Substitution:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\sigma \cdot G\left(\tfrac{x}{\sigma}\right)\right]_0^{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma \cdot \left[G\left(\tfrac{x}{\sigma}\right)\right]_0^{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[G\left(\tfrac{x}{\sigma}\right)\right]_0^{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[G(1) - G(0)].$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[G(x)]_0^1$, was identisch ist mit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^1 f_0(x)\,dx.$$

Damit ist gezeigt, dass das Integral über eine (halbe) Sigma-Umgebung unabhängig von den Parametern μ und σ der Normalverteilung ist. Analog folgt dies für alle weiteren Sigma-Umgebungen.

13

a) Für $P(X \in [-\triangle;\ \triangle]) = 0{,}8$ folgt $P(X \leq -\triangle) = \frac{1 - 0{,}8}{2} = 0{,}1$.

Mit dem Taschenrechner folgt (durch Ausprobieren oder Verwenden der „inversen Normalverteilung“) $-\triangle \approx -1{,}2816$, also $\triangle \approx 1{,}28$.

b) Individuelle Lösung.

Autor: Dr. Rebecca Roy

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5