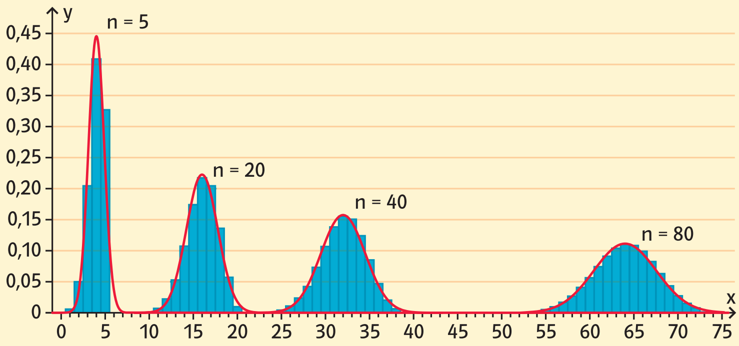
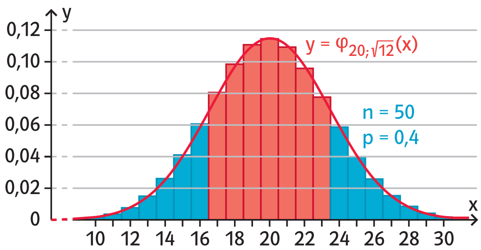
Der Satz von de Moivre-Laplace

Abgebildet sind die Histogramme zu binomialverteilten Zufallsgrößen mit dem Parameter $p = 0{,}8$ und verschiedenen Werten für n sowie verschiedene Gauß'sche Glockenkurven. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Histogramme und Kurven bei wachsendem n.



Die Kontur des Histogramms einer Binomialverteilung mit großem n hat ihr Maximum beim Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und Wendestellen bei $\mu \pm \sigma$, wobei $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ die Standardabweichung ist.
Die Kontur lässt sich gut durch die Gauß'sche Glockenkurve einer Normalverteilung mit den Parametern μ und σ annähern.

Abgebildet ist das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n = 50$ und $p = 0{,}4$.
Der Erwartungswert ist $\mu = 50 \cdot 0{,}4 = 20$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{12} \approx 3{,}464$.
Die rote Kurve ist der Graph der Gauß'schen Glockenfunktion $\varphi_{20;\,\sqrt{12}}$.



Die Wahrscheinlichkeit $P(17 \le X \le 23)$ erhält man aus dem Histogramm als Summe der Flächeninhalte der Säulen zu den k-Werten von 17 bis 23. Sie kann damit durch den Inhalt einer Fläche zwischen Glockenkurve und x-Achse angenähert werden, die man mithilfe des folgenden Integrals berechnet:

$$P(17 \le X \le 23) \approx \int_{16{,}5}^{23{,}5} \varphi_{20;\,3{,}464}(x)\,dx \approx 0{,}6877.$$

Als Grenzen wählt man hier 16,5 und 23,5 (anstatt 17 und 23), denn die Fläche der zugehörigen Säulen des Histogramms befindet sich genau zwischen diesen Werten. Diese Veränderung der Integrationsgrenzen nennt man **Stetigkeitskorrektur**. Sie liefert einen besseren Näherungswert beim Übergang von der diskreten Binomialverteilung zur stetigen Normalverteilung.

Satz von de Moivre-Laplace: Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n und p sowie reelle Zahlen a und b gilt

$$P(a \le X \le b) \approx \int_{a-0{,}5}^{b+0{,}5} \varphi_{\mu;\,\sigma}(x)\,dx,$$

wobei $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ ist.

Die Näherung ist hinreichend gut, wenn für die Standardabweichung $\sigma > 3$ gilt **(Laplace-Bedingung)**.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Beispiel **Wahrscheinlichkeiten näherungsweise berechnen**

Die Zufallsgröße X ist $B_{100;\,0{,}3}$-verteilt. Berechnen Sie die angegebene Wahrscheinlichkeit näherungsweise mithilfe des Satzes von de Moivre-Laplace. Vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

a) $P(X \le 35)$ **b)** $P(X > 28)$ **c)** $P(28 \le X \le 32)$

Lösung

Es ist $\mu = 100 \cdot 0{,}3 = 30$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{21} \approx 4{,}583 > 3$ (Laplace-Bedingung erfüllt).

a) $P(X \le 35) \approx \int_{-\infty}^{35{,}5} \varphi_{30;\,4{,}583}(x)\,dx \approx 0{,}8850$; der exakte Wert (auf vier Dezimalen) ist 0,8839.

b) $P(X > 28) \approx \int_{28{,}5}^{\infty} \varphi_{30;\,4{,}583}(x)\,dx \approx 0{,}6283$; der exakte Wert (auf vier Dezimalen) ist 0,6232.

c) $P(28 \le X \le 32) \approx \int_{27{,}5}^{32{,}5} \varphi_{30;\,4{,}583}(x)\,dx \approx 0{,}4146$; der exakte Wert (auf vier Dezimalen) ist 0,4144.

Aufgaben

○ **1** Die Zufallsgröße X ist $B_{225;\,0{,}5}$-verteilt. Berechnen Sie die angegebene Wahrscheinlichkeit näherungsweise mithilfe des Satzes von de Moivre-Laplace.

a) $P(X \le 108)$ **b)** $P(X > 110)$ **c)** $P(100 \le X \le 120)$ **d)** $P(102 < X < 118)$
e) $P(X > 109)$ **f)** $P(X \ge 112)$ **g)** $P(98 < X \le 110)$ **h)** $P(108 \le X < 115)$

○ *Test*

2 Ein Gartencenter bietet Gurkensamen an, die zu 95 % keimen. Berechnen Sie mithilfe des Satzes von de Moivre-Laplace näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass von 600 ausgesäten Samen

a) höchstens 565 keimen, **b)** weniger als 570 keimen,
c) mindestens 565 keimen, **d)** 565 bis 575 keimen.

◒ **3** Die Zufallsgröße X ist $B_{100;\,0{,}1}$-verteilt. Berechnen Sie die angegebene Wahrscheinlichkeit näherungsweise mithilfe des Satzes von de Moivre-Laplace und bestimmen Sie den prozentualen Fehler zum exakten Wert.

a) $P(X < 12)$ **b)** $P(X \ge 5)$ **c)** $P(5 \le X \le 12)$ **d)** $P(6 < X \le 14)$

◒ *Test*

4 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}6$.

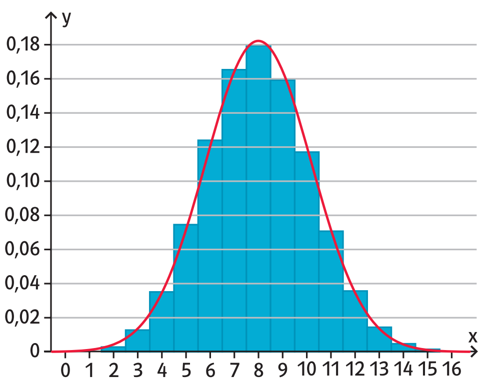
a) Berechnen Sie $P(13 \le X \le 16)$ exakt, mithilfe des Satzes von de Moivre-Laplace mit Stetigkeitskorrektur sowie mithilfe des Satzes von de Moivre-Laplace ohne Stetigkeitskorrektur.

b) Geben Sie zu den Ergebnissen von Teilaufgabe a) jeweils den prozentualen Fehler an.

● **5** Gegeben sind die $B_{20;\,0{,}4}$-verteilte Zufallsgröße X und die Gauß'sche Glockenkurve zu den Parametern μ und σ.

a) Geben Sie natürliche Zahlen a und b so an, dass die Näherung mithilfe des Satzes von de Moivre-Laplace für die Wahrscheinlichkeit $P(a \le X \le b)$ einen zu großen Wert bzw. einen zu kleinen Wert ergibt.

b) Berechnen Sie für die in Teilaufgabe a) gewählten Zahlen a und b die prozentuale Abweichung des Näherungswerts von $P(a \le X \le b)$ vom exakten Wert.



Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

Einstiegsaufgabe

Bei wachsendem n werden die Histogramme immer breiter und flacher. Dies trifft auch auf die Glockenkurven zu. Die Histogramme werden auch immer symmetrischer. Die Unterschiede zwischen der Kontur des Histogramms und der Glockenkurve werden immer geringer.

1

Es ist $n = 225$, $p = 0{,}5$, $\mu = 225 \cdot 0{,}5 = 112{,}5$ und $\sigma = \sqrt{225 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5 > 3$; damit ist die Laplace-Bedingung erfüllt.

a) $P(X \leq 108) \approx \int_{-\infty}^{108{,}5} \varphi_{112{,}5;\,7{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}2969$

b) $P(X > 110) \approx \int_{110{,}5}^{\infty} \varphi_{112{,}5;\,7{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}6051$

c) $P(100 \leq X \leq 120) \approx \int_{99{,}5}^{120{,}5} \varphi_{112{,}5;\,7{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}8154$

d) $P(102 < X < 118) = P(103 \leq X \leq 117) \approx \int_{102{,}5}^{117{,}5} \varphi_{112{,}5;\,7{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}6563$

e) $P(X > 109) \approx \int_{109{,}5}^{\infty} \varphi_{112{,}5;\,7{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}6554$

f) $P(X \geq 112) \approx \int_{111{,}5}^{\infty} \varphi_{112{,}5;\,7{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}5530$

g) $P(98 < X \leq 110) = P(99 \leq X \leq 110) \approx \int_{98{,}5}^{110{,}5} \varphi_{112{,}5;\,7{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}3639$

h) $P(108 \leq X < 115) \approx \int_{107{,}5}^{114{,}5} \varphi_{112{,}5;\,7{,}5}(x)\,dx \approx 0{,}3526$

2

Es ist $n= 600$, $p = 0{,}95$, $\mu = 600 \cdot 0{,}95 = 570$ und $\sigma = \sqrt{570 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05} = \sqrt{28{,}5} \approx 5{,}339 > 3$; damit ist die Laplace-Bedingung erfüllt.

a) $P(X \leq 565) \approx \int_{-\infty}^{565{,}5} \varphi_{570{,}5;\,5{,}339}(x)\,dx \approx 0{,}1996$

b) $P(X < 570) \approx \int_{-\infty}^{569{,}5} \varphi_{570{,}5;\,5{,}339}(x)\,dx \approx 0{,}4627$

c) $P(X \geq 565) \approx \int_{564{,}5}^{\infty} \varphi_{570{,}5;\,5{,}339}(x)\,dx \approx 0{,}8486$

d) $P(565 \leq X \leq 575) \approx \int_{564{,}5}^{575{,}5} \varphi_{570{,}5;\,5{,}339}(x)\,dx \approx 0{,}6971$

3

Es ist $n = 100$, $p = 0{,}1$, $\mu = 100 \cdot 0{,}1 = 10$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3$; damit ist die Laplace-Bedingung gerade nicht erfüllt.

a) $P(X < 12) \approx \int_{-\infty}^{11{,}5} \varphi_{110;\,3}(x)\,dx \approx 0{,}6915$; exakter Wert (auf vier Dezimalen): 0,7030; $\frac{0{,}6915}{0{,}7030} = 0{,}9836$; also prozentualer Fehler: ca. −1,64 %.

b) $P(X \geq 5) \approx \int_{4{,}5}^{\infty} \varphi_{110;\,3}(x)\,dx \approx 0{,}9666$; exakter Wert (auf vier Dezimalen): 0,9763; $\frac{0{,}9666}{0{,}9763} = 0{,}9901$; also prozentualer Fehler: ca. −0,99 %.

c) $P(5 \leq X \leq 12) \approx \int_{4{,}5}^{12{,}5} \varphi_{110;\,3}(x)\,dx \approx 0{,}7643$; exakter Wert (auf vier Dezimalen): 0,7781; $\frac{0{,}7643}{0{,}7781} = 0{,}9823$; also prozentualer Fehler: ca. −1,77 %.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

d) $P(6 < X \leq 14) \approx \int_{6,5}^{14,5} \varphi_{110;\,3}(x)\,dx \approx 0{,}8115$; exakter Wert (auf vier Dezimalen): 0,8103; $\frac{0{,}8115}{0{,}8103} = 1{,}0015$; also prozentualer Fehler: ca. +0,15 %.

4

a) Exakt: $P(13 \leq X \leq 16) \approx 0{,}3999$.
Es ist $\mu = 20 \cdot 0{,}6 = 12$ und $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}191 < 3$; damit ist die Laplace-Bedingung nicht erfüllt.

Mit Stetigkeitskorrektur: $P(13 \leq X \leq 16) \approx \int_{12,5}^{16,5} \varphi_{12;\,2{,}191}(x)\,dx \approx 0{,}3897$.

Ohne Stetigkeitskorrektur: $P(13 \leq X \leq 16) \approx \int_{13}^{16} \varphi_{12;\,2{,}191}(x)\,dx \approx 0{,}2901$.

b) Mit Stetigkeitskorrektur: $\frac{0{,}3897}{0{,}3999} \approx 0{,}9745$; also beträgt der prozentuale Fehler ca. 2,55 %.

Ohne Stetigkeitskorrektur: $\frac{0{,}2901}{0{,}3999} \approx 0{,}7254$; also beträgt der prozentuale Fehler ca. 27,46 %.

5

Individuelle Lösung, z. B.:
a) Es ist $\mu = 20 \cdot 0{,}4 = 8$ und $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}191$.
Zu großer Wert:
Für $a = 9$ und $b = 10$ ergibt sich $P(9 \leq X \leq 10) \approx \int_{8,5}^{10,5} \varphi_{8;\,2{,}191}(x)\,dx \approx 0{,}2828$. Der exakte Wert (auf vier Dezimalen) ist 0,2769.
Zu kleiner Wert:
Für $a = 5$ und $b = 7$ ergibt sich $P(5 \leq X \leq 7) \approx \int_{4,5}^{7,5} \varphi_{8;\,2{,}191}(x)\,dx \approx 0{,}3547$. Der exakte Wert (auf vier Dezimalen) ist 0,3649.
b) Prozentualer Fehler: $\frac{0{,}2828}{0{,}2769} \approx 1{,}0213$, also ca. +2,13 %, bzw. $\frac{0{,}3547}{0{,}3649} \approx 0{,}9720$, also ca. −2,80 %.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5