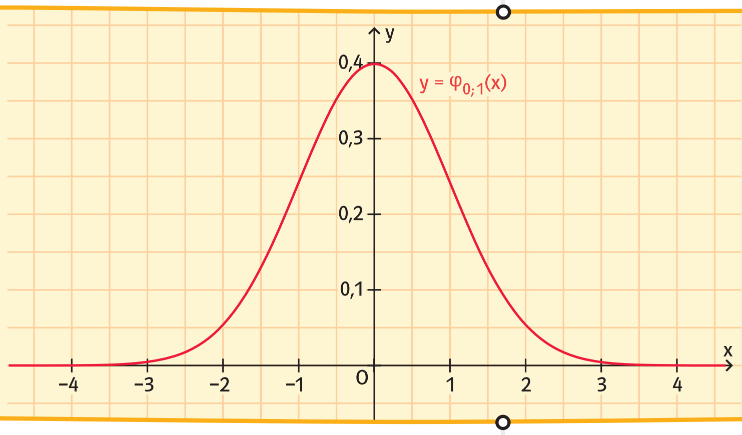
Umkehraufgaben zur Normalverteilung

Die Zufallsgröße X ist standardnormalverteilt, d.h. normalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Gegeben ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion.
Bestimmen Sie näherungsweise anhand des Graphen drei verschiedene Intervalle I, für die $P(X \in I) = 0{,}25$ gilt.



Für eine normalverteilte Zufallsgröße X lässt sich mithilfe eines Taschenrechners zu jedem Intervall $[a; b]$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \in [a; b])$ berechnen. Ist X z.B. $N_{29;\,11}$-verteilt, so ergibt sich mit einem Taschenrechner die Wahrscheinlichkeit des Intervalls $[23; 47]$ zu $P(23 \le X \le 47) \approx 0{,}6564$.
Umgekehrt lässt sich für eine normalverteilte Zufallsgröße X zu einer Wahrscheinlichkeit p mit einem Taschenrechner das zugehörige Intervall $(-\infty; c]$ bestimmen. Es wird eine Zahl c berechnet, sodass $P(X \le c) = p$ ist.
Beispielsweise ergibt sich für die $N_{29;\,11}$-verteilte Zufallsgröße X und die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}33$ der Wert $c \approx 24{,}16$, d.h. $P(X \le 24{,}16) \approx 0{,}33$.

Eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern μ und σ heißt $N_{\mu;\,\sigma}$-verteilt.

Der zugehörige Taschenrechnerbefehl ist meist eine Abkürzung des Begriffs „Inverse Normalverteilung“.

Für eine $N_{\mu;\,\sigma}$-verteilte Zufallsgröße X lässt sich zu einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit p mit einem Taschenrechner das Intervall $I = (-\infty; c]$ finden, für das $P(X \in I) = p$ gilt.

Beispiel 1 Zu vorgegebener Wahrscheinlichkeit das passende Intervall finden
Bestimmen Sie zur $N_{100;\,25}$-verteilten Zufallsgröße die Grenze c des passenden Intervalls.
a) $P(X < c) = 0{,}35$
b) $P(X > c) = 0{,}35$
c) $P(50 \le X \le c) = 0{,}35$
d) $P(c \le X < 120) = 0{,}35$

Lösung
a) $c = 90{,}37$, also $P(X < 90{,}37) \approx 0{,}35$
b) Aus $P(X > c) = 0{,}35$ folgt $P(X \le c) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$. Man berechnet (TR): $c \approx 109{,}63$, also $P(X > 109{,}63) \approx 0{,}35$.
c) Es ist $P(50 \le X \le c) = P(X \le c) - P(X \le 50) = 0{,}35$, also $P(X \le c) = 0{,}35 + P(X \le 50) \approx 0{,}3728$. Damit berechnet man (TR): $c \approx 91{,}89$, also $P(50 \le X \le 91{,}89) \approx 0{,}35$.
d) Es ist $P(c \le X < 120) = P(X < 120) - P(X < c) = 0{,}35$, also $P(X < c) = P(X < 120) - 0{,}35$ $\approx 0{,}79 - 0{,}35 = 0{,}44$. Daraus berechnet man (TR): $c \approx 96{,}23$, also $P(96{,}23 \le X \le 120) \approx 0{,}35$.

Beispiel 2 Abweichung vom Erwartungswert bestimmen
Eine Zufallsgröße X ist $N_{72;\,19}$-verteilt. Um wie viel darf die Zufallsgröße X vom Erwartungswert höchstens abweichen, damit die Wahrscheinlichkeit für diese Abweichung maximal 0,2 beträgt?

Lösung
Gesucht ist die Zahl c mit $P(\mu - c \le X \le \mu + c) = 0{,}2$. Da die Normalverteilung symmetrisch um den Erwartungswert μ ist, ist $P(\mu \le X \le \mu + c) = 0{,}1$ und damit
$P(X \le \mu + c) = P(X \le \mu) + P(\mu \le X \le \mu + c) = 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}6$.
Man berechnet also $\mu + c$ mit $P(X \le \mu + c) = 0{,}6$. Es ist $\mu + c \approx 76{,}81$.
Also darf X von μ höchstens um $c \approx 76{,}81 - \mu = 4{,}81$ abweichen.

Autor: Dr. Rebecca Roy
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie für eine $N_{250;\,45}$-verteilte Zufallsgröße X die passende Zahl c.
a) $P(X < c) = 0{,}47$ **b)** $P(X \le c) = 0{,}73$ **c)** $P(X < c) = 0{,}89$ **d)** $P(X \le c) = 0{,}31$

○ **2** Bestimmen Sie für eine $N_{99;\,11}$-verteilte Zufallsgröße X die Grenze c des passenden Intervalls.
a) $P(X > c) = 0{,}19$ **b)** $P(c \le X \le 88) = 0{,}05$ **c)** $P(66 \le X < c) = 0{,}7$
d) $P(c < X \le 123) = 0{,}35$ **e)** $P(X \ge c) = 0{,}9$ **f)** $P(23 < X < c) = 0{,}41$

○ **3** Ein bestimmter Gummireifen darf nur dann verkauft werden, wenn sein Profil mindestens 10 mm tief ist. Eine Maschine produziert solche Reifen. Dabei ist die Profiltiefe dieser Reifen normalverteilt mit $\mu = 12$ und $\sigma = 1{,}5$ (alle Angaben in mm).
a) Wie viel Prozent Ausschuss produziert diese Maschine?
b) Der Hersteller sortiert automatisch die 15 % der Reifen mit der geringsten Profiltiefe aus. Welche Profiltiefe hat ein Reifen mindestens, wenn er in den Verkauf kommt?

○ *Test*

4 Hochwertiges Olivenöl wird in Flaschen zu 250 ml verkauft. Dabei darf die Menge des abgefüllten Öls in den Flaschen etwas schwanken. Man kann die Menge des abgefüllten Olivenöls als normalverteilt mit $\mu = 250$ und $\sigma = 5$ modellieren (alle Angaben in ml).
a) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Flaschen mit weniger als 240 ml gefüllt sind.
b) Für welche Mindestmenge c kann der Verkäufer zu 95 % garantieren?

◒ **5** Bestimmen Sie eine symmetrische Umgebung $[150 - c;\ 150 + c]$ um den Erwartungswert $\mu = 150$ einer normalverteilten Zufallsgröße X mit $\sigma = 25$, sodass die Gleichung gilt.
a) $P(150 - c < X < 150 + c) = 0{,}5$ **b)** $P(150 - c \le X < 150 + c) = 0{,}25$
c) $P(150 - c < X \le 150 + c) = 0{,}75$ **d)** $P(150 - c < X < 150 + c) = 0{,}8$

◒ **6** Eine Zufallsgröße ist standardnormalverteilt. Bestimmen Sie die Zahl c.
a) $P(|X| > c) = 0{,}3$ **b)** $P(|X| \le c) = 0{,}3$ **c)** $P(|X| \le c) = 0{,}5$

Standardnormalverteilt bedeutet $N_{0;\,1}$-verteilt.

◒ **7** Für Tennisspieler ist das Gewicht ihres Tennisschlägers wichtig. Das Gewicht der Schläger eines bestimmten Modells ist normalverteilt mit $\mu = 290$ und $\sigma = 5$ (alle Angaben in Gramm).
a) Welchen Toleranzbereich $[\mu - t;\ \mu + t]$ um den Erwartungswert μ kann der Hersteller dieses Tennisschlägers zu mindestens 90 % garantieren?
b) Ein Spieler akzeptiert eine etwas größere Abweichung des Gewichts nach unten, da er dies durch Aufkleben von Bleiplättchen wieder ausgleichen kann. Nach oben darf die Abweichung des Schläger-Gewichts aber maximal 2 g betragen. Welche Abweichung nach unten ist möglich, damit das Gewicht der produzierten Schläger mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % im entsprechenden Bereich liegt?

◒ *Test*

8 Bestimmen Sie die Zahl c so, dass für eine $N_{160,\,80}$-verteilte Zufallsgröße die Gleichung gilt.
a) $P(160 - c \le X \le 160 + c) = 0{,}6$ **b)** $P(-10 \le X \le c) = 0{,}7$

● **9** In einer σ-Umgebung um μ liegen 68 % aller Werte einer $N_{\mu;\,\sigma}$-verteilten Zufallsgröße. Bestimmen Sie damit ohne Taschenrechner für die gegebenen Werte von μ und σ die Zahl c so, dass die Gleichung gilt.
a) $\mu = 50,\ \sigma = 8$: $P(X < c) = 0{,}5$ **b)** $\mu = 800,\ \sigma = 120$: $P(X < c) = 0{,}84$
c) $\mu = 72,\ \sigma = 35$: $P(X < c) = 0{,}16$ **d)** $\mu = 120,\ \sigma = 12$: $P(X > c) = 0{,}5$
e) $\mu = 650,\ \sigma = 100$: $P(X > c) = 0{,}16$ **f)** $\mu = 300,\ \sigma = 60$: $P(X \ge c) = 0{,}84$

Autor: Dr. Rebecca Roy
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

Einstiegsaufgabe

Individuelle Lösung, z. B.:

Durch „Kästchenzählen“: $(-\infty; -0{,}67)$; $(0{,}67; \infty)$; $(-0{,}67; 0)$; $(0; 0{,}67)$ …

1

a) $c \approx 246{,}61$ **b)** $c \approx 277{,}58$ **c)** $c \approx 305{,}19$ **d)** $c \approx 277{,}69$

2

a) $P(X \le c) = 0{,}81$; $c \approx 108{,}66$
b) $P(X \le c) = P(X \le 88) - 0{,}05 \approx 0{,}10866$; $c \approx 85{,}43$
c) $P(X \le c) \approx 0{,}70135$; $c \approx 104{,}81$
d) $P(X \le c) \approx 0{,}63544$; $c \approx 102{,}81$
e) $P(X \le c) = 0{,}1$; $c \approx 84{,}90$
f) $P(X < c) \approx 0{,}41$; $c \approx 96{,}50$

3

a) $P(X \le 10) = 0{,}0912$
Die Maschine produziert etwa 9 % Ausschuss.
b) $P(X \le c) = 0{,}15$; $c \approx 10{,}45$
Die Profiltiefe eines Reifens, der in den Verkauf kommt, ist mindestens 10,45 mm.

4

a) $P(X < 240) \approx 0{,}02275$. Etwa 2,3 % aller Flaschen sind mit weniger als 240 ml gefüllt.
b) $P(X \ge c) = 0{,}95$, also $P(X < c) = 0{,}05$ und damit $c \approx 241{,}78$.
Der Verkäufer kann zu 95 % für eine Mindestmenge von etwa 241,8 ml garantieren.

5

a) $P(X < 150 - c) = 0{,}25$; $c \approx 16{,}86$
b) $P(X < 150 - c) = 0{,}375$; $c \approx 7{,}97$
c) $P(X < 150 - c) = 0{,}125$; $c \approx 28{,}76$
d) $P(X < 150 - c) = 0{,}1$; $c \approx 32{,}04$

6

a) $P(X \le -c) = 0{,}15$; $c \approx 1{,}036$ **b)** $P(X \le -c) = 0{,}35$; $c \approx 0{,}385$ **c)** $P(X \le -c) = 0{,}25$; $c \approx 0{,}674$

7

a) $P(X \in [\mu - t;\ \mu + t]) = 0{,}9$ bzw. $P(X \le 290 - t) = 0{,}05$; $t \approx 8{,}22$
Der Hersteller kann den Toleranzbereich ± 8,22 g um den Mittelwert 290 g zu 90 % garantieren.
b) $P(c \le X \le 292) \ge 0{,}6$ d.h. $P(X \le 292) - P(X < c) \ge 0{,}6$
Da $P(X < 292) \approx 0{,}65542$ ist, ist c gesucht mit $P(X \le c) \le 0{,}05542$; $c \approx 282{,}03$.
Es ist eine Abweichung von 7,97 g nach unten möglich, damit das Gewicht des Schlägers mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % im gewünschten Bereich liegt.

8

a) Gesucht ist c mit $P(X \le 160 - c) = 0{,}2$, also $c \approx 67{,}33$.
b) Gesucht ist c mit $P(X \le c) - P(X < -10) = 0{,}7$ bzw. $P(X \le c) \approx 0{,}71679$, also $c \approx 205{,}9$.

9

a) $c = \mu = 50$ **b)** $c = \mu + \sigma = 920$ **c)** $c = \mu - \sigma = 37$
d) $c = \mu = 120$ **e)** $c = \mu + \sigma = 750$ **f)** $c = \mu - \sigma = 240$

Autor: Dr. Rebecca Roy

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5