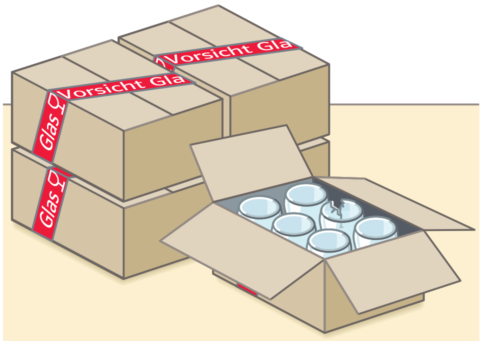
1 Binomialverteilung: Wechsel des Parameters p

Einsetzbar ab Lerneinheit 3 in Kapitel VIII.

Ein Händler bezieht Gläser von einem Hersteller. Diese sind in Kartons zu jeweils sechs Stück verpackt. Erfahrungsgemäß werden beim Transport 3 % der Gläser beschädigt.



a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Karton keine beschädigten Gläser enthält.

b) Der Händler bekommt 60 Kartons geliefert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens 52 kein beschädigtes Glas enthalten.

2 Binomialverteilung: Wechsel des Parameters p

Einsetzbar ab Lerneinheit 3 in Kapitel VIII.

Eine Sorte Müsli wird in 500-g-Packungen verkauft. Dabei enthalten abfüllungsbedingt 30 % der Packungen weniger als 500 g Müsli. Das Müsli wird in Kartons zu acht Stück verkauft.

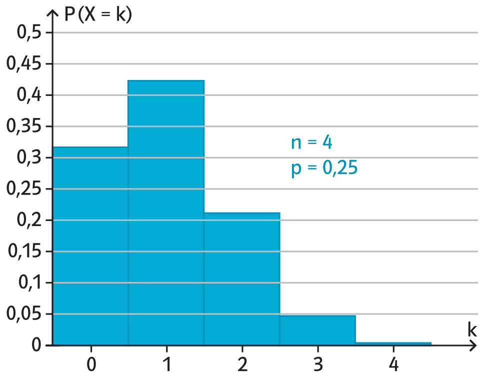
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Karton nur Packungen mit mindestens 500 g enthält.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von zehn Kartons höchstens einer nur Packungen mit mindestens 500 g enthält.

3 Binomialverteilung: Zusammenhang zwischen $B_{n;\,p}$ und $B_{n;\,1-p}$

Einsetzbar ab Lerneinheit 3 in Kapitel VIII.

Die Abbildung zeigt das Histogramm zu einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 4$ und $p = 0{,}25$.



a) Skizzieren Sie das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 4$ und $p = 0{,}75$.

b) Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Histogrammen der binomialverteilten Zufallsgrößen mit den Parametern n und p sowie n und $1 - p$.

c) Beweisen Sie den Zusammenhang aus Teilaufgabe b).

4 Binomialverteilung: Veränderung der Parameter

Einsetzbar ab Lerneinheit 3 in Kapitel VIII.

Beurteilen Sie die Aussage zur Binomialverteilung.

a) Wenn n und p gleich bleiben und k größer wird, dann wird $P(X \geq k)$ kleiner.

b) Wenn k und p gleich bleiben und n größer wird, dann wird $P(X = k)$ kleiner.

c) Wenn n und k gleich bleiben und p größer wird, dann wird p^k größer. Also muss auch $P(X = k)$ größer werden.

5 Binomialverteilung: Vertiefung zu μ und σ

Einsetzbar ab Lerneinheit 3 in Kapitel VIII.

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = \frac{9}{10}$.

a) Die Zufallsgröße Y hat denselben Erwartungswert, aber die dreifache Standardabweichung. Bestimmen Sie die zugehörigen Parameter.

b) Zeigen Sie, dass es keine Zufallsgröße mit demselben Erwartungswert und der vierfachen Standardabweichung gibt.

c) Beweisen Sie, dass für jede binomialverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ gilt: $\mu \geq \sigma^2$.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

6 Normalverteilung: Zusammenhang zwischen μ und σ und der Glockenkurve I

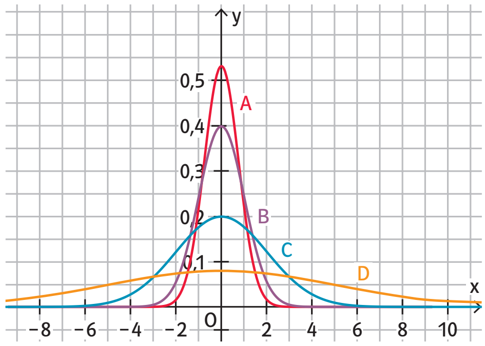
Ordnen Sie jedem Graphen der Gauß'schen Glockenkurve die passenden Parameter zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

1 $\mu = 0,\ \sigma = 5$

2 $\mu = 0,\ \sigma = 1$

3 $\mu = 0,\ \sigma = 2$

4 $\mu = 0,\ \sigma = 0{,}75$



Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

7 Normalverteilung: Zusammenhang zwischen μ und σ und der Glockenkurve II

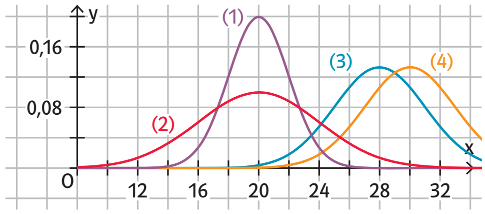
Ordnen Sie jedem Graphen der Gauß'schen Glockenkurve die passenden Parameter zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

A $\mu = 30,\ \sigma = 3$

B $\mu = 28,\ \sigma = 3$

C $\mu = 20,\ \sigma = 2$

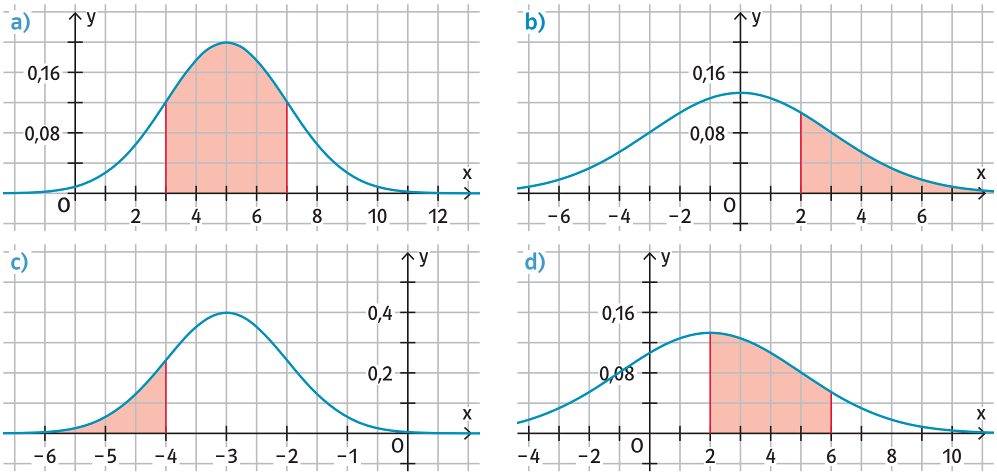
D $\mu = 20,\ \sigma = 4$



Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

8 Normalverteilung: Glockenkurve und Wahrscheinlichkeiten I

Abgebildet ist eine Gauß'sche Glockenkurve mit ganzzahligen Parametern μ und σ. Geben Sie diese an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die dem Inhalt der markierten Fläche entspricht.



Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

9 Normalverteilung: Glockenkurve und Wahrscheinlichkeiten II

Skizzieren Sie die Gauß'sche Glockenkurve mit den Parametern μ und σ. Markieren Sie die Fläche, deren Inhalt der angegebenen Wahrscheinlichkeit entspricht.

a) $\mu = 0,\ \sigma = 1$
$P(-1 \le X \le 1)$

b) $\mu = 2,\ \sigma = 1$
$P(0 \le X \le 2)$

c) $\mu = 0,\ \sigma = 2$
$P(X \le 1)$

d) $\mu = 3,\ \sigma = 0{,}5$
$P(3 \le X \le 4)$

Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

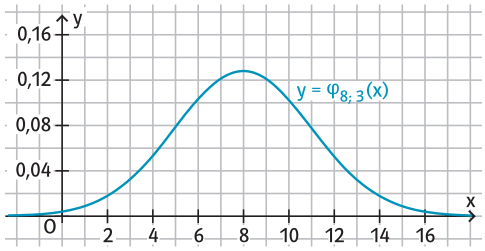
10 Normalverteilung: Glockenkurve und Wahrscheinlichkeiten III

Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

Abgebildet ist die Gauß'sche Glockenkurve mit den Parametern $\mu = 8$ und $\sigma = 3$. Skizzieren Sie den Graphen im Heft und markieren Sie die Fläche, deren Inhalt der angegebenen Wahrscheinlichkeit entspricht.

a) $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$

b) $P\left(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + \frac{2}{3}\sigma\right)$



11 Normalverteilung: Werte mithilfe der Glockenkurve bestimmen

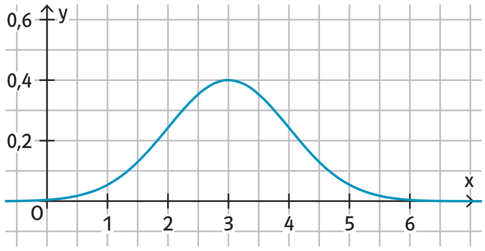
Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

Die Zufallsgröße X ist normalverteilt. Die Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Gauß'schen Glockenfunktion. Die Parameter μ und σ sind ganzzahlig.

a) Geben Sie μ und σ an.

b) Geben Sie $P(X = 3)$ an.

c) Bestimmen Sie mithilfe des Graphen näherungsweise $P(3 \le X \le 5)$.



12 Normalverteilung: Auswirkung einer Veränderung der Parameter auf die Glockenkurve

Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

Die Zufallsgröße X ist normalverteilt mit $\mu = 30$ und $\sigma = 2$.

a) Berechnen Sie $P(26 \le X \le 34)$.

b) Beschreiben Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe b) ändert, wenn sich
(1) μ vergrößert bzw. verkleinert, (2) σ vergrößert bzw. verkleinert.

13 Normalverteilung: Bestimmung von μ durch Probieren

Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

Eine Anlage zum maschinellen Abfüllen von Mehl in 1-kg-Packungen kann auf ganze Gramm genau eingestellt werden. Stellt man sie auf den Wert a ein, so wird die abgefüllte Menge (in g) durch eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = a$ und $\sigma = 2{,}8$ beschrieben. Weniger als 5 % der abgefüllten Packungen sollen die angegebene Menge unterschreiten. Ermitteln Sie, auf welchen Wert man die Anlage mindestens einstellen muss.

14 Normalverteilung: Eigenschaften der Glockenkurve

Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

a) Begründen Sie, dass die Gauß'sche Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ nur positive Werte annimmt.

b) Beschreiben Sie, wie der Graph von $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ aus dem Graphen von $\varphi_{0;\,1}$ hervorgeht.

c) Begründen Sie mithilfe von Teilaufgabe b), dass der Graph von $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$ ist.

15 Normalverteilung: Bestimmung eines um μ symmetrischen Intervalls

Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

Die Anzahl der Eier, die ein Huhn einer bestimmten Rasse pro Jahr legt, kann durch eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\mu = 190$ und $\sigma = 20$ modelliert werden.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Huhn pro Jahr zwischen 170 und 210 Eier legt.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Eier, die ein zufällig ausgewähltes Huhn pro Jahr legt, sich um höchstens c von μ unterscheidet, beträgt mindestens 90 %. Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl c mit dieser Eigenschaft.

16 Normalverteilung: Bestimmung von μ und σ aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten

Einsetzbar ab Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

Die Zufallsgröße X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ.

a) Es ist $P(X < 5) = P(X \ge 9)$. Bestimmen Sie μ.

b) Es ist $P(X \le 22) \approx 0{,}159$ und $P(X \le 28) \approx 0{,}841$. Bestimmen Sie μ.

c) Es ist $\mu = 12$ und $P(X < 10) \approx 0{,}182$. Bestimmen Sie σ durch Probieren (1 Nachkommastelle).

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

1

a) P(„Alle Gläser in einem Karton sind unbeschädigt.“) = $0{,}97^6 \approx 0{,}833$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Karton keine beschädigten Gläser enthält, beträgt etwa 83,3 %.

b) X zählt die Kartons, die kein beschädigtes Glas enthalten, und ist binomialverteilt mit $n = 60$ und $p \approx 0{,}833$.

$P(X \geq 52) = 1 - P(X \leq 51) \approx 0{,}310$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 31,0 % enthalten mindestens 52 Kartons kein beschädigtes Glas.

2

a) Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung mindestens 500 g enthält: 0,7.

Wahrscheinlichkeit, dass ein Karton nur solche Packungen enthält: $0{,}7^8 \approx 0{,}0576$.

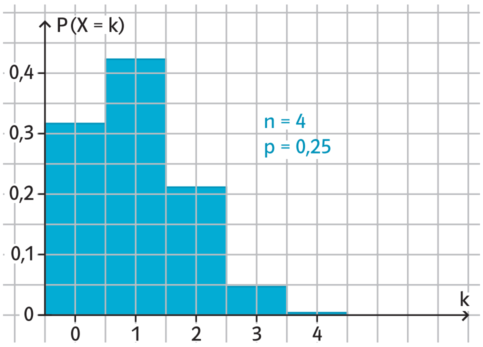
b) X: Anzahl der Kartons mit Packungen, die alle mindestens 500 g enthalten

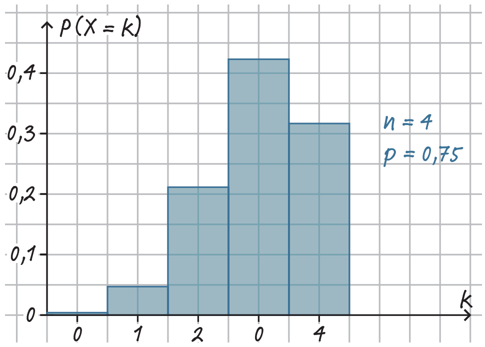
X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}0576$.

$P(X \leq 1) \approx 0{,}890$

3

a) Zu Y gehört das rechte Histogramm. Links ist zum Vergleich noch einmal das ursprüngliche Histogramm zu X abgebildet.





b) Die Histogramme sind an der Achse $k = \frac{n}{2}$ gespiegelt.

(Dies gilt unabhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist. Falls n gerade ist, so ist die Säule für $k = \frac{n}{2}$ bei beiden Histogrammen gleich.)

c) Wenn X die Parameter n und p und Y die Parameter n und 1 − p hat, dann gilt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ und

$P(Y = n - k) = \binom{n}{n-k} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^k$.

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus n Objekten auszuwählen. Bei jeder Wahl bleiben $n - k$ Objekte übrig. Also ist die Anzahl der Möglichkeiten, $n - k$ Objekte aus n Objekten auszuwählen, gleich groß und somit gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(Mithilfe der Formel für den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.)$$

Es folgt $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{n-k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{n-k} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^k = P(Y = n - k)$.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Somit entsprechen sich die folgenden Säulen im Histogramm:

X	Y
0	$n - 0 = n$
1	$n - 1$
2	$n - 2$
…	…
n	$n - n = 0$

4

a) Die Aussage ist wahr, denn $P(X \geq k)$ ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens k Treffer. Je größer k wird, desto geringer wird diese Wahrscheinlichkeit.

b) Die Aussage ist falsch. Wenn n größer wird, wandert das zugehörige Histogramm anschaulich gesprochen nach rechts. Je nachdem, wie groß k ist, kann $P(X = k)$ größer oder kleiner werden.

Beispiel: $p = 0{,}5$ und $k = 8$

$n = 10$: $P(X = 8) \approx 0{,}044$

$n = 15$: $P(X = 8) \approx 0{,}196$

$n = 25$: $P(X = 8) \approx 0{,}032$

c) Die Aussage ist falsch. Zwar wird p größer, aber der andere Faktor $(1 - p)^{n-k}$ wird dafür kleiner, weil $1 - p$ kleiner wird.

Gegenbeispiel: $n = 5$ und $k = 2$.

Für $p = 0{,}3$ ist $P(X = k) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}3087$.

Für $p = 0{,}6$ ist $P(X = k) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}2304$.

5

a) X: $\mu = 20 \cdot \frac{9}{10} = 18$ und $\sigma = \sqrt{20 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10}} = 1{,}8$

Y habe die Parameter n_Y und p_Y. Dann gilt $n_Y \cdot p_Y = 18$ und $\sqrt{n_Y \cdot p_Y \cdot (1 - p_Y)} = 3 \cdot \sqrt{1{,}8}$. Die erste Gleichung in die zweite eingesetzt und quadriert ergibt $18 \cdot (1 - p_Y) = 9 \cdot 1{,}8 = 16{,}2$. Daraus folgt $p_Y = \frac{1}{10}$ und somit ist $n_Y = \frac{18}{\frac{1}{10}} = 180$.

b) Für eine solche Zufallsgröße Z müsste gelten: $n_Z \cdot p_Z = 18$ und $\sqrt{n_Z \cdot p_Z \cdot (1 - p_Z)} = 4 \cdot \sqrt{1{,}8}$. Analog zum Vorgehen in Teilaufgabe a) ergibt sich $18 \cdot (1 - p_Z) = 28{,}8$ mit der Lösung $p_Z = -0{,}6$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $0 \leq p_Z \leq 1$ gelten muss.

c) Da $0 \leq p \leq 1$ ist, gilt auch $0 \leq 1 - p \leq 1$. Also folgt $\mu = n \cdot p \geq n \cdot p \cdot (1 - p) = \sigma^2$.

6

μ ist immer gleich. Je größer σ ist, desto breiter ist der Graph. Also gehört A zu 4, B zu 2, C zu 3 und D zu 1.

7

$\mu = 20$ passt zu (1) und (2). Da (1) schmaler als (2) ist, muss σ bei (1) kleiner als bei (2) sein. (1) gehört daher zu C und (2) zu D.

(3) gehört zu B, da $\mu = 28$ ist.

(4) gehört zu A, da $\mu = 30$ ist.

8

a) $\mu = 5$ und $\sigma = 2$; $P(3 \leq X \leq 7) \approx 0{,}683$.

b) $\mu = 0$ und $\sigma = 3$; $P(X \geq 2) \approx 0{,}252$.

c) $\mu = -3$ und $\sigma = 1$; $P(X \leq -4) \approx 0{,}159$.

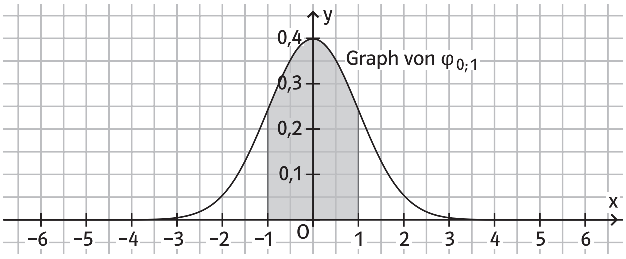
d) $\mu = 2$ und $\sigma = 3$; $P(2 \leq X \leq 6) \approx 0{,}409$.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

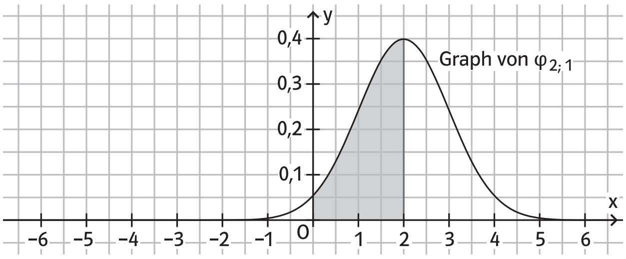
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

9

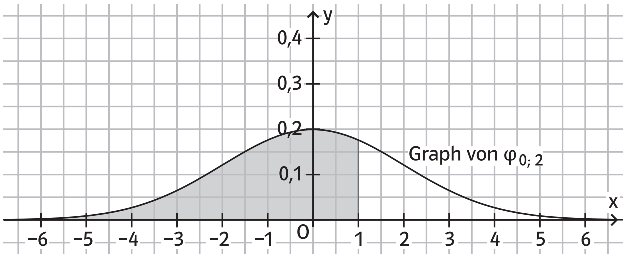
a)



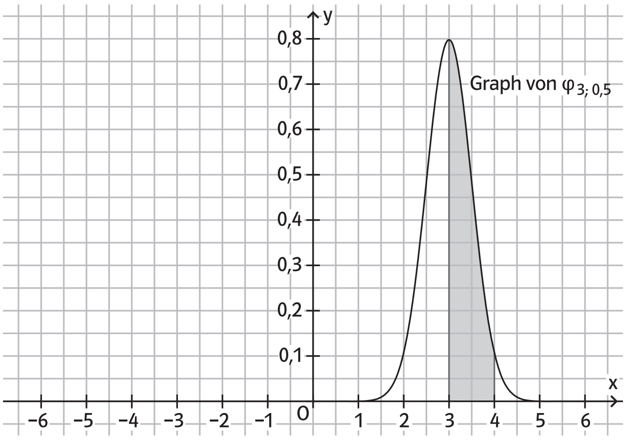
b)



c)



d)

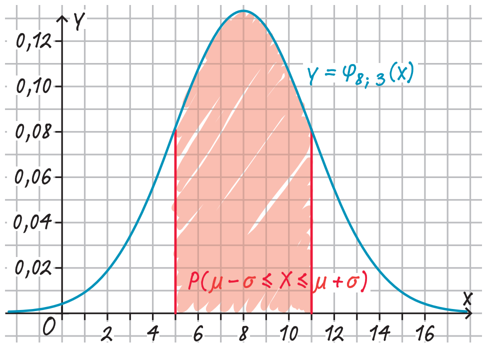


Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

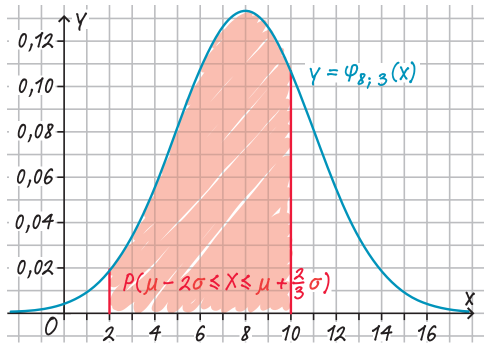
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

10

a)



b)



11

a) $\mu = 3$; $\sigma = 1$

b) $P(X = 3) = 0$

c) Die Fläche zwischen der Gauß'schen Glockenkurve und der x-Achse über dem Intervall $[3; 5]$ umfasst näherungsweise 4,75 Kästchen. Damit ist $P(3 \le X \le 5) \approx 0{,}475$.
(In der Aufgabenstellung nicht gefordert: Der exakte Wert ist auf drei Dezimalen gerundet 0,477.)

12

a) $P(26 \le X \le 34) \approx 0{,}955$

b) (1) Die Wahrscheinlichkeit wird kleiner, wenn sich μ vergrößert oder verkleinert, denn für $\mu = 30$ ist die zugehörige Fläche symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$. Für größere oder kleinere Werte von μ wird die Fläche unter dem Graphen im Intervall $[26; 34]$ und damit auch die Wahrscheinlichkeit kleiner.
(2) Die Wahrscheinlichkeit wird kleiner, wenn σ größer wird, denn dann wird der Graph breiter. Sie wird größer, wenn σ kleiner wird, denn dann wird der Graph schmaler. Für größere (kleinere) Werte von σ wird die Fläche unter dem Graphen im Intervall $[26; 34]$ kleiner (größer) und damit auch die Wahrscheinlichkeit kleiner (größer).

13

X gibt die Masse (in g) an, die eine Packung Mehl enthält.
X ist normalverteilt mit $\sigma = 2{,}8$; μ ist gesucht.
Für $\mu = 1004$ ist $P(X < 1000) \approx 0{,}077$ und für $\mu = 1005$ ist $P(X < 1000) \approx 0{,}037$ (WTR).
Die Anlage muss mindestens auf den Wert 1005 eingestellt werden.

14

a) Es ist $\varphi_{\mu;\,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ und $e^x > 0$ für alle reellen Zahlen x. Außerdem ist $\sigma > 0$ und damit auch $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Folglich ist $\varphi_{\mu;\,\sigma}(x) > 0$ für alle reellen Zahlen x.

b) Der Funktionsterm von $\varphi_{0;\,1}$ ist $\varphi_{0;\,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Eine Streckung des Graphen von $\varphi_{0;\,1}$ in x-Richtung mit dem Faktor σ führt auf den Funktionsterm

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

Eine Verschiebung des Graphen von g in x-Richtung um μ führt auf den Funktionsterm $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Eine Streckung des Graphen von h in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$ führt auf den Funktionsterm

$\varphi_{\mu;\,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Man erhält also den Graphen von $\varphi_{\mu;\,\sigma}$ aus dem Graphen von $\varphi_{0;\,1}$ durch Streckung mit σ in x-Richtung, Verschiebung um μ in x-Richtung und Streckung mit $\frac{1}{\sigma}$ in y-Richtung.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

c) Der Graph von $\varphi_{0;1}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn es ist $\varphi_{0;1}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ $= \varphi_{0;1}(x)$.

Die Streckung in x-Richtung ändert nichts an der Symmetrie. Also ist der um μ in x-Richtung verschobene Graph achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$. Die Streckung in y-Richtung ändert ebenfalls nichts an der Symmetrie.

15

X: Anzahl der Eier, die ein Huhn pro Jahr legt. X ist normalverteilt mit $\mu = 190$ und $\sigma = 20$.

a) $P(170 \le X \le 210) \approx 0{,}683$. (Dies kann man auch mithilfe der σ-Regeln direkt angeben; hier wird ein σ-Intervall betrachtet.)

b) Für $c = 32$ ist $P(158 \le X \le 222) \approx 0{,}890$ und für $c = 33$ ist $P(159 \le X \le 223) \approx 0{,}901$. Damit ist $c = 33$.

16

a) Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung ist $\mu = \frac{5+9}{2} = 7$.

b) Da $1 - 0{,}841 = 0{,}159$ ist, folgt aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung $\mu = \frac{22+28}{2} = 25$.

c) Für $\sigma = 2{,}1$ erhält man $P(X < 10) \approx 0{,}170$, für $\sigma = 2{,}2$ ist $P(X < 10) \approx 0{,}182$ und für $\sigma = 2{,}3$ ist $P(X < 10) \approx 0{,}192$. Also ist $\sigma \approx 2{,}2$.

Autor: Prof. Dr. Torsten Schatz

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5