1 Geraden und Punkte

Einsetzbar ab Lerneinheit 2 in Kapitel VI.

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, sowie die Punkte $A(0|0|1)$, $B(0|-1|0)$ und $C(1|0|0)$.

a) Zeigen Sie, dass A und B auf g liegen, C jedoch nicht. Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

b) Die Punkte D und E liegen auf der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten von D und E so, dass das Dreieck DEC gleichschenklig ist und die Basis $\overline{DE}$ die Länge 1 LE hat.

2 Ebenen mit Parametern (1)

Einsetzbar ab Lerneinheit 9 in Kapitel VI.

Gegeben ist die Ebenenschar $E_t: tx_1 + 2x_2 + 2tx_3 = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Veranschaulichen Sie die Ebene E_1 mithilfe ihrer Spurpunkte in einem Koordinatensystem.

b) Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen der Schar in einer Geraden g schneiden.

c) Es gibt eine Gerade h durch den Ursprung, welche die Gerade g senkrecht schneidet. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden h.

3 Ebenen mit Parametern (2)

Einsetzbar ab Lerneinheit 1 in Kapitel VII.

Gegeben ist die Ebenenschar $E_a: 3x_1 - ax_2 + x_3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g in Parameterform.

b) Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen der Schar in g schneiden.

c) Bestimmen Sie für jedes a eine Gleichung der Ebene F_a, die parallel zu E_a durch $P(1|2|-3)$ verläuft.

d) Für welchen Wert von a sind die Ebenen E_a und F_a identisch?

e) Bestimmen Sie die Ebenen der Schar E_a, die vom Punkt $R(0|0|4)$ den Abstand 1 LE haben.

4 Punkte mit Parametern

Einsetzbar ab Lerneinheit 7 in Kapitel VII.

Gegeben sind die Punkte $P_a(1+2a|3-a|2a)$ und $Q_b(4-2b|b|7-2b)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{P_0Q_0}$.

b) Begründen Sie, dass alle Punkte P_a und Q_b jeweils auf einer Geraden p bzw. q liegen. Zeigen Sie, dass p und q zueinander parallel und verschieden sind.

c) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an, in der die Geraden p und q liegen.

d) Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Ebene F, die bei Spiegelung an F die Gerade p in die Gerade q überführt.

e) Berechnen Sie einen Wert des Parameters b in Abhängigkeit von a, für welchen Q_b symmetrisch zu P_a bezüglich der Ebene F von Teilaufgabe d) liegt.

Autor: Rüdiger Sandmann

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

1

a) Setzt man A und B in die Geradengleichung ein, führt dies zu einer wahren Aussage. Setzt man C ein, ergibt sich ein Widerspruch.
Es ist $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}$, das Dreieck ABC also gleichseitig.

b) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ (Fußpunkt der Höhe auf $\overline{AB}$) ist $M(0\,|\,-0{,}5\,|\,0{,}5)$.
Für den Punkt $D_t(0\,|\,t\,|\,1+t)$ muss gelten: $d(M; D_t) = 0{,}5$, also:

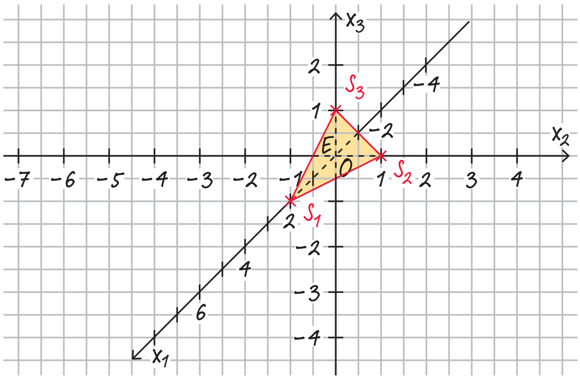
$$\sqrt{(t+0{,}5)^2 + (t+0{,}5)^2} = 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow\; 2(t+0{,}5)^2 = 0{,}25$$
$$\Leftrightarrow\; (t+0{,}5)^2 = 0{,}125$$
$$\Leftrightarrow\; t+0{,}5 = \pm\sqrt{0{,}125}$$

Somit folgt $t_1 = \sqrt{0{,}125} - 0{,}5 \approx -0{,}15$ und $t_2 = -\sqrt{0{,}125} - 0{,}5 \approx -0{,}85$.

Koordinaten von D und E: $D\left(0\,\middle|\,\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2}\right)$ und $E\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{2}\right)$.

2

a) Die Spurpunkte von E_1 sind $S_1(2\,|\,0\,|\,0)$, $S_2(0\,|\,1\,|\,0)$ und $S_3(0\,|\,0\,|\,1)$.



b) Ein Schnitt der Ebenen E_t und E_s $(t \neq s)$ führt zu $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, unabhängig von t.

Alle Ebenen E_t schneiden sich somit in der Geraden g.

c) Die Hilfsebene $H: 2x_1 - x_3 = 0$ enthält den Ursprung $O(0\,|\,0\,|\,0)$ und ist orthogonal zur Geraden g.
Schneidet man H mit g, erhält man den Schnittpunkt $R(0{,}4\,|\,0\,|\,0{,}8)$ und somit die Gerade
$h: \vec{x} = a \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

3

a) Schnittgerade $s: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$.

b) Der Schnitt von s mit E_a liefert $-3r + 3r = 0$. Diese Gleichung ist immer erfüllt. Alle Ebenen E_a beinhalten also die Gerade g.

c) Der Ansatz $F_a: 3x_1 - ax_2 + x_3 = b$ liefert bei der Punktprobe mit $P(1\,|\,2\,|\,-3)$:
$3 - 2a - 3 = b$, also $b = -2a$ und somit $F_a: 3x_1 - ax_2 + x_3 = -2a$.

d) $E_a: 3x_1 - ax_2 + x_3 = 0$
$F_a: 3x_1 - ax_2 + x_3 = -2a$
Für $a = 0$ sind die Ebenen E_a und F_a identisch: $3x_1 + x_3 = 0$.

e) Mithilfe der HNF von E_a erhält man für den Abstand der Ebenen E_a von $R(0\,|\,0\,|\,4)$: $\left|\frac{4}{\sqrt{10+a^2}}\right| = 1$ und $a = \pm\sqrt{6}$. Die Ebenen $E_{-\sqrt{6}}$ und $E_{\sqrt{6}}$ haben vom Punkt R den Abstand 1 LE.

Autor: Rüdiger Sandmann
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

4

a) $M(2{,}5\,|\,1{,}5\,|\,3{,}5)$

b) Die Ortsvektoren $\overrightarrow{p_a}$ haben die Form $\overrightarrow{p_a} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Dies ist die Gleichung einer Geraden p.

Für die Gerade q erhält man analog $q\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

Da die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, sind die Geraden p und q zueinander parallel.
Der Punkt $P(1\,|\,3\,|\,0)$ liegt nicht auf q. Somit sind p und q zueinander parallel, aber verschieden.

c) Eine Parametergleichung von E ist $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \left(\begin{pmatrix}4\\0\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\\7\end{pmatrix}$.

Ein Normalenvektor von E ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}3\\-3\\7\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\\3\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich $E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\8\\3\end{pmatrix} = 0$ bzw.

$E\colon x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 25$.

d) Wenn die Gerade p bei Spiegelung an der Ebene F in die Gerade q übergehen soll, dann muss F parallel zu p und q sein und von beiden Geraden denselben Abstand haben. Damit liegt der Punkt $M(2{,}5\,|\,1{,}5\,|\,3{,}5)$ aus Teilaufgabe a) sicher in F. Ein Spannvektor von F ist aufgrund der Parallelität von F zu p und q ein Richtungsvektor von p bzw. q, z. B. $\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$. Ein zweiter Spannvektor ist ein Normalenvektor der Ebene E aus Teilaufgabe c), z. B. $\begin{pmatrix}1\\8\\3\end{pmatrix}$. Eine Parametergleichung der Ebene F ist damit $F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\\3{,}5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\8\\3\end{pmatrix}$.

e) Die Ebene F aus Teilaufgabe d) lautet in Normalenform $F\colon 19x_1 + 4x_2 - 17x_3 = -6$. Die Lotgerade h von Q_b auf F ist gegeben durch $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4-2b\\b\\7-2b\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}19\\4\\-17\end{pmatrix}$. Den Lotfußpunkt L des Lotes von Q_b auf F erhält man durch Einsetzen von Q_b in F: $19 \cdot (4 - 2b + 19t) + 4 \cdot (b + 4t) - 17 \cdot (7 - 2b - 17t) = -6$, also $-43 + 666t = -6$ bzw. $t = \frac{37}{666}$. Für den Spiegelpunkt Q_b' gilt damit $\overrightarrow{OQ_b'} = \begin{pmatrix}4-2b\\b\\7-2b\end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{37}{666} \cdot \begin{pmatrix}19\\4\\-17\end{pmatrix}$, also

$Q_b'\left(\frac{55}{9} - 2b\,\middle|\,\frac{4}{9} + b\,\middle|\,\frac{46}{9} - 2b\right)$. Es soll $Q_b' = P_a$ gelten, was für $b = \frac{23}{9} - a$ der Fall ist.

Autor: Rüdiger Sandmann
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5