Abitur 2012

Aufgaben

Prüfungsteil B (mit Hilfsmittel)

Aufgabe B1

Ein Reisebüro pflegt eine Datei mit Adressen von 4120 langjährigen Stammkunden, die ihren Urlaub über dieses Reisebüro buchen. Zum Ende eines jeden Jahres untersucht die Geschäftsleitung das Buchungsverhalten der Kunden im Hinblick auf die Anzahl der Urlaube, die die Kunden im abgelaufenen Jahr bei dem Reisebüro gebucht haben.
Dabei wird unterschieden zwischen den Kunden, die im abgelaufenen Jahr genau einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe E), Kunden, die im abgelaufenen Jahr mehr als einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe M), und Kunden, die im abgelaufenen Jahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe K).

a) Die Geschäftsleitung hat festgestellt, dass das Buchungsverhalten der Stammkunden während eines Jahres vom Buchungsverhalten im vorangegangenen Jahr abhängt. So wurde in früheren Jahren von folgendem Buchungsverhalten der Stammkunden bei dem Reisebüro ausgegangen:
- Von den Kunden der Gruppe E eines Jahres buchen im folgenden Jahr 75 % ebenfalls genau einen Urlaub; 10 % der Gruppe buchen mehr als einen Urlaub und 15 % keinen Urlaub.
- Von den Kunden, die in einem Jahr mehr als einen Urlaub gebucht haben, buchen 60 % im Folgejahr ebenfalls mehr als einen Urlaub, 20 % buchen genau einen Urlaub und 20 % buchen keinen Urlaub.
- 57% der Kunden der Gruppe K buchen bei dem Reisebüro im nächsten Jahr genau einen Urlaub, 28 % sogar mehr als einen Urlaub, während 15 % auch im Folgejahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro buchen.

Dabei wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich die Stammkundschaft im Laufe der Zeit nicht verändert.
Die drei Kundengruppen werden zu einer Kundenverteilung $\vec{v} = \begin{pmatrix} E \\ M \\ K \end{pmatrix}$ zusammengefasst.
Stellen Sie dieses Buchungsverhalten durch ein geeignetes Diagramm dar und Tipp 1
6 P *bestimmen Sie eine Übergangsmatrix U, die dieses Verhalten beschreibt.* Tipp 2

b) Aufgrund einer Änderung des Urlaubsverhaltens gilt aktuell bei weiterhin konstanter Anzahl von Stammkunden die folgende Übergangsmatrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

3 P (1) *Interpretieren Sie die dritte Spalte der Matrix A im Sachzusammenhang.* Tipp 3

Im Jahr 2015 buchten 2400 Kunden genau einen Urlaub, 1200 Kunden buchten mehr als einen Urlaub, während 520 Kunden keine Buchung bei dem Reisebüro durchführten.

2 P (2) *Bestimmen Sie unter den Übergangsbedingungen, die durch die Matrix A gegeben sind, die zu erwartende Verteilung für das Jahr 2016.* Tipp 4

3 P (3) *Bestimmen Sie unter den Übergangsbedingungen, die durch die Matrix A gegeben sind, die Verteilung für das Jahr 2021.* Tipp 5

c) Durch gezielte Werbemaßnahmen wird während des Jahres 2016 das Buchungsverhalten der Kunden der Gruppe K so beeinflusst, dass von diesem Jahr an die Veränderung des Buchungsverhaltens durch die Matrix B beschrieben werden kann. Es wird weiterhin von einer konstanten Anzahl von Stammkunden ausgegangen.

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leqq q \leqq 0{,}95$$

4 P (1) Für $q = 0{,}75$ gibt es für diese Matrix B eine stabile Verteilung. *Bestimmen Sie diese stabile Verteilung.* Tipp 6

4 P (2) *Untersuchen Sie, wie viele Buchungen das Reisebüro bei einem Übergangsverhalten, wie es unter c) (1) beschrieben ist, für das Jahr 2016 mindestens erwarten kann. Gehen Sie dabei aus von den in Teilaufgabe b) für das Jahr 2015 angegebenen Buchungszahlen.* Tipp 7

4 P (3) *Gehen Sie von den in Teilaufgabe b) für das Jahr 2015 angegebenen Buchungen aus und ermitteln Sie den Wert von q für den Fall, dass sich am Ende des Jahres 2016 herausstellt, dass 2524 Kunden im Jahr 2016 genau einen Urlaub gebucht haben.* Tipp 8

d) (1) Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Stammkunden einen Urlaub in Deutschland in diesem Reisebüro bucht, liegt bei 40 %. An einem Tag buchen 20 Stammkunden unabhängig voneinander in diesem Reisebüro einen Urlaub.

3 P *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 10 von diesen Stammkunden einen Urlaub in Deutschland gebucht haben.* Tipp 9

Das Reisebüro veranstaltet zu Werbezwecken einen Aktionstag. Dabei gibt es auch eine Lotterie.
In einer Urne befinden sich 60 Kugeln, diese Kugeln sind rot, gelb oder blau. Dabei ist die Anzahl der gelben Kugeln in der Urne um 50 % größer als die Anzahl der roten Kugeln. Die Kunden ziehen bei dieser Lotterie drei Kugeln mit Zurücklegen aus der Urne. Wenn alle drei gezogenen Kugeln eine verschiedene Farbe haben, dann erhält der Kunde einen Reiseführer gratis.

(2) Sei p, mit $0 < p < 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit, dass man eine rote Kugel aus der Urne zieht.
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Reiseführer zu gewinnen, durch den Funktionsterm $f(p) = 9p^2 - 22{,}5p^3$ beschrieben werden kann. — 6 P — Tipp 10

(3) *Bestimmen Sie die Anzahl der Kugeln für jede der drei Farben so, dass die Wahrscheinlichkeit, den Reiseführer zu gewinnen, maximal wird.* — Tipp 11
Geben Sie diese maximale Gewinnwahrscheinlichkeit für den Reiseführer an. — 5 P — Tipp 11

Tipps

Folgende Tipps geben eine erste Hilfestellung:

Tipp 1	Lesen Sie den Aufgabentext sorgfältig durch. Verwenden Sie die Abkürzungen E, M und K für die Kundengruppen.
Tipp 2	Lesen Sie den Aufgabentext sorgfältig durch. Beachten Sie, welche Spalte der Übergangsmatrix die Übergänge für welche Kundengruppe beschreibt.
Tipp 3	Welche Übergangswahrscheinlichkeiten stehen in der dritten Spalte?
Tipp 4	Wie erhalten Sie die Verteilung für das Jahr 2016 aus der Startverteilung für das Jahr 2015 mithilfe der Übergangsmatrix A?
Tipp 5	Wie erhalten Sie die Verteilung für das Jahr 2021 aus der Startverteilung für das Jahr 2015 mithilfe der Übergangsmatrix A?
Tipp 6	Es gibt zwei Wege, eine stabile Verteilung zu erhalten. Beachten Sie, dass Ihnen hier Ihr GTR sehr hilfreich sein kann.
Tipp 7	Wie viele Buchungen macht ein Kunde aus der Kundengruppe M mindestens im Jahr 2016?
Tipp 8	Um q zu bestimmen, müssen Sie nicht die ganze Verteilung des Jahres 2016 in Abhängigkeit von q bestimmen.
Tipp 9	Beachten Sie, dass die Kunden unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eine Reise nach Deutschland buchen.
Tipp 10	Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm, um sich die Situation zu veranschaulichen.
Tipp 11	Hier liegt eine Extremwertaufgabe vor.

Folgende Tipps geben eine weitere Hilfestellung:

Tipp 1	Im Diagramm benötigen Sie neun Pfeile, von denen drei reflexiv sind.
Tipp 2	Die Übergangsmatrix hat neun Elemente, die alle verschieden von Null sind.
Tipp 3	Die dritte Spalte gibt die Übergangswahrscheinlichkeiten aus der Kundengruppe K in die drei Kundengruppen an. Formulieren Sie diese konkret mit Worten.
Tipp 4	Berechnen Sie $\vec{v_1}$ mithilfe der Gleichung $\vec{v_1} = A \cdot \vec{v_0}$. Setzen Sie dabei Ihren GTR ein.
Tipp 5	Berechnen Sie $\vec{v_6}$ mithilfe der Gleichung $\vec{v_6} = A^6 \cdot \vec{v_0}$. Setzen Sie dabei Ihren GTR ein.
Tipp 6	Berechnen Sie mit Ihrem GTR zum Beispiel die Matrizen B^{50} und B^{100} um näherungsweise eine Grenzmatrix G zu erhalten.

Tipp 7	Berechnen Sie die Verteilung von 2016 mithilfe der Gleichung $\vec{v_1} = A \cdot \vec{v_0}$. Setzen Sie dabei Ihren GTR ein. Beachten Sie, dass es zwei Kundengruppen gibt, die 2016 Urlaube buchen.
Tipp 8	Da Sie nur eine Information über die Anzahl der Kunden haben, die im Jahr 2016 in der Kundengruppe E sind, genügt es, die erste Komponente der Verteilung in Abhängigkeit von q zu bestimmen.
Tipp 9	Wegen der Unabhängigkeit der Buchungen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit liegt hier eine binomialverteilte Zufallsvariable vor. Verwenden Sie Ihren GTR.
Tipp 10	Die Wahrscheinlichkeit, eine gelbe Kugel zu ziehen, beträgt 1,5 p. Beachten Sie, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten immer 1 sein muss.
Tipp 11	Sie können das Maximum der Funktion f mit dem GTR oder von Hand bestimmen.

Folgende Tipps helfen, Lücken zu schließen:

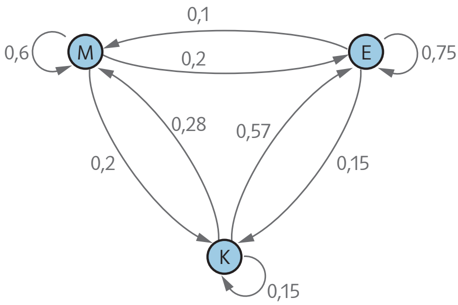
Tipp 1	Bearbeiten Sie aus **F 113b** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 2	Bearbeiten Sie aus **F 113a** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 3	Bearbeiten Sie aus **F 113a** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2.
Tipp 4	Bearbeiten Sie aus **F 114** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben 1 und 2.
Tipp 5	Bearbeiten Sie aus **F 116** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 6	Machen Sie sich im Einführungstext von **F 117** mit den beiden dort beschriebenen Wegen vertraut. Bearbeiten Sie aus **F 117** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 7	Bearbeiten Sie aus **F 114** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben 1 und 2. Beachten Sie, dass jeder Kunde aus der Kundengruppe M mindestens zwei Urlaube im Jahr 2016 bucht.
Tipp 8	Bearbeiten Sie aus **F 119** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2.
Tipp 9	Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}4$. Bearbeiten Sie aus **F 101** das Beispiel 3 und die Aufgaben 1c), 1e) und 2a).
Tipp 10	Verwenden Sie die Pfadregeln. Bearbeiten Sie aus **F 97** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 11	Wie viele von den 60 Kugeln müssen rot sein, damit man mit der ermittelten Wahrscheinlichkeit p_1 eine rote Kugel zieht? Bearbeiten Sie aus **F 20** das Beispiel a) und die Aufgabe a).

Lösungen

Prüfungsteil B (mit Hilfsmittel)

Aufgabe B1

a) Es gibt drei Kundengruppen (Zustände), deren Buchungsverhalten man durch folgendes Übergangsdiagramm darstellen kann: F 113b



Um die Übergangsmatrix U zu erhalten, kann man entweder vom Text oder vom Übergangsdiagramm ausgehen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten kann man direkt bei den Pfeilen ablesen. (Beachten Sie dabei die Reihenfolge der Komponenten der Verteilung $\vec{v}$.)

Es gilt: $U = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}$ F 113a

b) (1) Das erste Element der dritten Spalte zeigt, dass 60 % der Stammkunden, die in einem Jahr keinen Urlaub im Reisebüro buchen, im Folgejahr genau einen Urlaub im Reisebüro buchen. F 113a
Das zweite Element der dritten Spalte zeigt, dass 30 % der Stammkunden, die in einem Jahr genau einen Urlaub im Reisebüro buchen, im Folgejahr auch genau einen Urlaub im Reisebüro buchen.
Das dritte Element der dritten Spalte zeigt, dass 10% der Stammkunden, die in einem Jahr keinen Urlaub im Reisebüro buchen, im Folgejahr auch keinen Urlaub im Reisebüro buchen.

(2) Die Startverteilung für das Jahr 2015 lautet $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 520 \end{pmatrix}$. Für die Verteilung im Jahr 2016 gilt:

$$\vec{v_1} = A \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 520 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2472 \\ 1116 \\ 532 \end{pmatrix}$$ F 114

(3) Für die Verteilung im Jahr 2021 gilt:

$$\vec{v_6} = A^6 \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}^6 \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 520 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2570 \\ 1034 \\ 516 \end{pmatrix}$$ F 116

c) (1) Da es eine stabile Verteilung gibt, führt jede Startverteilung auf lange Sicht zu dieser stabilen Verteilung. Man kann daher mit dem GTR für große Werte von k die Matrix B^k berechnen und erhält dadurch näherungsweise die Grenzmatrix G.

$$G \approx \begin{pmatrix} 0{,}660 & 0{,}660 & 0{,}660 \\ 0{,}223 & 0{,}223 & 0{,}223 \\ 0{,}117 & 0{,}117 & 0{,}117 \end{pmatrix}$$

F 117

Somit folgt $\vec{g} = G \cdot \vec{v_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}660 & 0{,}660 & 0{,}660 \\ 0{,}223 & 0{,}223 & 0{,}223 \\ 0{,}117 & 0{,}117 & 0{,}117 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 520 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2720 \\ 920 \\ 480 \end{pmatrix}$

F 114

Wenn 2720 Kunden genau einen Urlaub, 920 Kunden mehr als einen Urlaub und 480 Kunden keinen Urlaub im Reisebüro buchen, dann liegt eine stabile Verteilung vor.

Alternative Lösung:
Wenn man weiß, dass es eine stabile Verteilung $\vec{g}$ gibt, dann kann man diese stabile Verteilung mithilfe eines LGS exakt bestimmen. Es muss gelten:

$$B \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}75 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \vec{g}.$$

F 117

Man erhält ein homogenes LGS für die Komponenten g_1, g_2 und g_3 des Vektors $\vec{g}$.

Das LGS lautet:
$$\begin{aligned} -0{,}2g_1 + 0{,}2g_2 + 0{,}75g_3 &= 0 \\ 0{,}1g_1 - 0{,}4g_2 + 0{,}2g_3 &= 0 \\ 0{,}1g_1 + 0{,}2g_2 - 0{,}95g_3 &= 0 \end{aligned}$$

F 8

Dieses LGS löst man mit dem GTR, dieser liefert:

$g_1 = \frac{17}{3}r,\ g_2 = \frac{23}{12}r$ und $g_3 = r$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Mit der Bedingung $g_1 + g_2 + g_3 = 4120$ folgt $\frac{17}{3}r + \frac{23}{12}r + r = \frac{103}{12}r = 4120$ bzw. $r = 480$.

Aus $r = 480$ folgt $g_1 = 2720$, $g_2 = 920$ und $g_3 = 480$.

(2) Die Startverteilung für das Jahr 2015 lautet $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 520 \end{pmatrix}$. Für die Verteilung im Jahr 2016 gilt:

$$\vec{v_1} = B \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}75 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 520 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2550 \\ 1064 \\ 506 \end{pmatrix}$$

F 114

Im Jahr 2016 buchen 2550 Kunden genau eine Reise im Reisebüro. Jeder der 1064 Kunden, die 2016 mehr als eine Reise buchen, bucht mindestens zwei Reisen.
$2550 + 2 \cdot 1064 = 4678$

Das Reisebüro kann im Jahr 2106 mit mindestens 4678 Buchungen rechnen.

(3) Um den Wert von q zu bestimmen, genügt es, die erste Komponente der Verteilung $\vec{v_1}$ für das Jahr 2016 mit dem Parameter q zu berechnen.

Aus $\vec{v_1} = B \cdot \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1200 \\ 520 \end{pmatrix}$ folgt für die erste **F 119**

Komponente $v_{1;1} = 0{,}8 \cdot 2400 + 0{,}2 \cdot 1200 + q \cdot 520 = 520\,q + 2160$

Die Bedingung $v_{1;1} = 2524$ liefert eine lineare Gleichung zur Bestimmung von q:
$520\,q + 2160 = 2524$

Diese Gleichung hat die Lösung $q = \frac{2524 - 2160}{520} = 0{,}7.$ **F 1**

Wenn man q = 0,7 wählt, dann buchen 2524 Kunden im Jahr 2016 genau einen Urlaub im Reisebüro.

d) (1) Wenn man davon ausgeht, dass die Kunden unabhängig voneinander buchen, dann ist die Zufallsvariable X (Anzahl der Kunden, die einen Urlaub in Deutschland buchen) binomialverteilt mit n = 20 und p = 0,4.

Es gilt $P(X \geqq 10) = 1 - P(X \leqq 9) \approx 1 - 0{,}7553 = 0{,}2447.$ **F 101**

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 10 Stammkunden einen Urlaub in Deutschland gebucht haben, beträgt ca. 0,245 (24,5 %).

(2) Wenn in der Urne 50 % mehr gelbe Kugeln als rote Kugeln sind, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, eine gelbe Kugel zu ziehen:
$P(\text{gelb}) = 1{,}5 \cdot P(\text{rot}) = 1{,}5\,p$

Für die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, folgt mithilfe der Beziehung $P(\text{gelb}) + P(\text{rot}) + P(\text{blau}) = 1$ sofort:
$P(\text{blau}) = 1 - p - 1{,}5\,p = 1 - 2{,}5\,p$

Mit den Pfadregeln folgt für das Ziehen mit Zurücklegen für die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine gelbe, dann eine rote und dann eine blaue Kugel zu ziehen: $P(\text{grb}) = p \cdot 1{,}5\,p \cdot (1 - 2{,}5\,p)$ **F 97**

Da es auf die Reihenfolge der Züge nicht ankommt, gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ solche Pfade (grb; gbr; rgb; rbg; brg; bgr), die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. (Die Multiplikation ist kommutativ.)

Also gilt für den gesuchten Funktionsterm
$f(p) = 6 \cdot p \cdot 1{,}5\,p \cdot (1 - 2{,}5\,p) = 9\,p^2 \cdot (1 - 2{,}5\,p)$ und somit
$f(p) = 9\,p^2 - 22{,}5\,p^3$.

(3) Da der Funktionsterm f(p) die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beschreibt, muss man das Maximum der Funktion f auf dem Intervall]0; 0,4[suchen. **F 20**
Der GTR liefert ein lokales Maximum von f an der Stelle $p_1 \approx 0{,}267$ mit dem Funktionswert $f(p_1) \approx 0{,}213$. Am Graphen, den der GTR zeichnet, kann man erkennen, dass an beiden Rändern des Intervalls die Funktionswerte gegen 0 streben. Somit ist das lokale Maximum an der Stelle p_1 auch das globale Maximum auf dem Intervall.

Für die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel aus der Urne zu ziehen, gilt $p = \frac{r}{60}$, wobei r die Anzahl der roten Kugeln in der Urne ist. **F 94**

Aus $\frac{r}{60} \approx 0{,}267$ folgt $r \approx 16$.

Für die Anzahl g der gelben Kugeln gilt $g = 1{,}5r = 1{,}5 \cdot 16 = 24$.
Für die Anzahl b der blauen Kugeln gilt $b = 60 - 16 - 24 = 20$.

Wenn sich in der Urne 16 rote, 24 gelbe und 20 blaue Kugeln befinden, wird die Wahrscheinlichkeit, den Reiseführer zu gewinnen, maximal, sie beträgt dann ca. 0,213 (21,3 %).

Alternative Lösung für die Bestimmung des Maximums von f:
Man kann die Extremwertaufgabe auch ohne GTR exakt lösen.
Aus $f(p) = 9p^2 - 22{,}5p^3$ folgt $f'(p) = 18p - 67{,}5p^2$.

Notwendige Bedingung für ein lokales Maximum: $f'(p) = 18p - 67{,}5p^2 = 0$
$18p - 67{,}5p^2 = 0{,}5p \cdot (36 - 135p) = 0$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $p_1 = \frac{36}{135} = \frac{4}{15}$ und $p_2 = 0$.

Da p_2 nicht im Intervall liegt, gibt es nur den Kandidaten p_1 für eine Extremstelle. Ob in p_1 tatsächlich eine Extremstelle vorliegt, testet man mit der zweiten Ableitungsfunktion f″ von f.

Es gilt $f''(p) = 18 - 135p$. Einsetzen von p_1 liefert $f''(p_1) = f''\left(\frac{4}{15}\right) = -18 < 0$.

Somit liegt an der Stelle p_1 ein lokales Maximum von f vor.

Es gilt $f(p_1) = f\left(\frac{4}{15}\right) = \frac{16}{75}$.

Betrachtung der Randwerte:
Es gilt $\lim\limits_{p \to 0} (9p^2 - 22{,}5p^3) = 0$ und $\lim\limits_{p \to 0{,}4} (9p^2 - 22{,}5p^3) = 0$.
Somit ist das lokale Maximum auch das globale Maximum auf dem Intervall $]0; 0{,}4[$.

Hinweis:
Mit dem exakten Wert für p_1 erhält man den exakten Wert von r, der Anzahl der roten Kugeln in der Urne. Es gilt $\frac{r}{60} = \frac{4}{15}$ und somit $r = \frac{4}{15} \cdot 60 = 16$.