# Abitur 2013

## Aufgaben

### Pflichtteil

#### Aufgabe 1

2 VP Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2+5)\cdot e^{-2x}$. Tipp 1

#### Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4\sin(2x)$.

2 VP Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\pi) = 7$. Tipp 2

#### Aufgabe 3

2 VP Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$. Tipp 3

#### Aufgabe 4

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2+3$ und $g(x) = 2x$.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden
4 VP Funktionen eingeschlossen wird. Tipp 4

#### Aufgabe 5

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$

(2) $f'(2) = 0$

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$

(4) Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat.

5 VP Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen. Tipp 5

#### Aufgabe 6

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-1|3)$ und $B(2|-3|0)$. Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4|3|-8)$.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E. Tipp 6

4 VP Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt. Tipp 7

## Aufgabe 7

Gegeben sind die beiden Ebenen

$E_1\colon\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und $E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\7\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind. Tipp 8

Die Ebene $E_3$ ist parallel zu $E_1$ und $E_2$ und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.

4 VP Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene $E_3$. Tipp 9

## Aufgabe 8

Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

**a)** Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse: Tipp 10

A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.
B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

**b)** Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
Welche Werte kann X annehmen?
4 VP Berechnen Sie $P(X \leq 2)$. Tipp 11

## Aufgabe 9

Gibt es eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt?
3 VP Begründen Sie Ihre Antwort. Tipp 12

# Wahlteil **Analysis**

## Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8; \quad -4 \leqq x \leqq 4 \ \text{(x und f(x) in Meter).}$$

**a)** An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten? — Tipp 13
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein? — Tipp 14
Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1,7 m hoch.
6 VP Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen? — Tipp 15

**b)** Im Stollen soll in 6 m Höhe eine Lampe aufgehängt werden.
Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1,4 m von den Wänden entfernt sein.
3 VP Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann. — Tipp 16

**c)** Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
3 VP Wie breit darf der Behälter höchstens sein? — Tipp 17

## Aufgabe A 1.2

Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion $f_t$ gegeben durch $f_t(x) = (x-1)\cdot\left(1 - \frac{1}{t}\cdot e^x\right)$.

3 VP Für welche Werte von t besitzt $f_t$ mehr als eine Nullstelle? — Tipp 18

## Aufgabe A 2.1

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist. Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit

$$r(t) = 10\,000 \cdot (e^{-0{,}5t} - e^{-t}); \quad 0 \leqq t \leqq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, r(t) in Liter pro Stunde).

**a)** Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate. — Tipp 19
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde? — Tipp 20
4 VP Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab? — Tipp 21

**b)** Wie viel Wasser befindet sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank? — Tipp 22
3 VP Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank? — Tipp 23

**c)** Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion w mit

$$w(t) = r(t) - 400; \quad 3 \leqq t \leqq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, w(t) in Liter pro Stunde).

Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen? — Tipp 24
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab? — Tipp 25
4 VP Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank. — Tipp 26

## Aufgabe A 2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \leqq x \leqq 1$.
Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A.
Berechnen Sie A exakt. — Tipp 27

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x-Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.

4 VP Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von g. — Tipp 28

# Wahlteil **Analytische Geometrie / Stochastik**

## Aufgabe B 1.1

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$, $Q(0|6|0)$ und $R(0|0|6)$.
Gegeben ist außerdem die Ebene $E:\ 3x_2 + x_3 = 8$.

**a)** Stellen Sie den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar. Tipp 29
Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene E mit der $x_1x_2$-Ebene einschließt. Tipp 30
5 VP Bestimmen Sie den Abstand von E zur $x_1$-Achse. Tipp 31

**b)** Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch

$$E_a:\ 3x_2 + x_3 = a;\ \ a \in \mathbb{R}$$

Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander? Tipp 32
Für welche Werte von a hat der Punkt $S(6|6|6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene $E_a$? Tipp 33
6 VP Für welche Werte von a hat die Ebene $E_a$ gemeinsame Punkte mit dem Würfel? Tipp 34

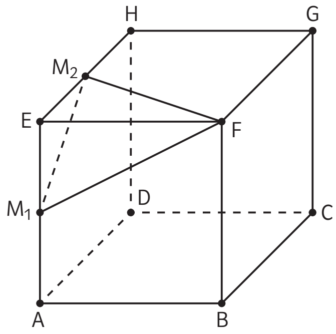
## Aufgabe B 1.2

Bei einer Lotterie sind 10 % der Lose Gewinnlose.
Jemand kauft drei Lose.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens zwei Gewinnlose? Tipp 35

Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50 % liegt? Tipp 36
4 VP

## Aufgabe B 2.1

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten $M_1$ und $M_2$ befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte A (8 | 0 | 0), C (0 | 8 | 0) und H (0 | 0 | 8) die entsprechenden Ecken des Raumes dar.

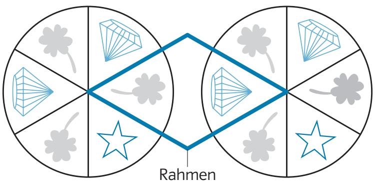



**a)** Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt. — Tipp 37
Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. — Tipp 38
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs. — Tipp 39
Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E? — Tipp 40
6 VP (Teilergebnis: S: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$)

**b)** Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden.
Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch.
3 VP In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange? — Tipp 41

## Aufgabe B 2.2

Auf zwei Glücksrädern befinden sich jeweils sechs gleich große Felder. Bei jedem Spiel werden die Räder einmal in Drehung versetzt. Sie laufen dann unabhängig voneinander aus und bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau ein Feld im Rahmen sichtbar ist.




**a)** Zunächst werden die Räder als ideal angenommen. Bei einem Einsatz von 0,20 € sind folgende Auszahlungen vorgesehen:

| | |
|---|---|
| Stern – Stern | 2,00 € |
| Diamant – Diamant | 0,85 € |
| Kleeblatt – Kleeblatt | 0,20 € |

In allen anderen Fällen wird nichts ausbezahlt.
Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist. — Tipp 42
Nun möchte der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 5 Cent Gewinn erzielen.
Dazu soll nur der Auszahlungsbetrag für „Diamant – Diamant“ geändert werden.
3 VP Berechnen Sie diesen neuen Auszahlungsbetrag. — Tipp 43

**b)** Es besteht der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit p für „Stern – Stern“ geringer als $\frac{1}{36}$ ist. Daher soll ein Test mit 500 Spielen durchgeführt werden.
Formulieren Sie die Entscheidungsregel für die Nullhypothese $H_0$: $p \geq \frac{1}{36}$,
3 VP wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5 % betragen soll. — Tipp 44

# Tipps

## Folgende Tipps geben eine erste Hilfestellung:

| | |
|---|---|
| **Tipp 1** | Die Funktion ist das Produkt zweier Funktionen. Verwenden Sie daher die Produktregel. |
| **Tipp 2** | Beachten Sie zunächst, dass es zu f unendlich viele Stammfunktionen gibt. Mit dem gegebenen Funktionswert wählen Sie dann die zutreffende aus. |
| **Tipp 3** | Multiplizieren Sie die Gleichung mit $e^x$, $e^x \neq 0$. Dies ist eine Äquivalenzumformung. |
| **Tipp 4** | Die x-Werte gemeinsamer Punkte (die Schnittstellen) der beiden Graphen erhalten Sie als Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$. |
| **Tipp 5** | Interpretieren Sie die vier Angaben geometrisch. Denken Sie also hier an besondere Punkte, Geraden, Tangenten, Asymptoten usw. |
| **Tipp 6** | Den Richtungsvektor der Geraden g können Sie bestimmen. Welche Rolle übernimmt dieser Richtungsvektor bei der Ebene E, zu der die Gerade g orthogonal sein soll? |
| **Tipp 7** | Der zu einem Geradenpunkt gehörende Parameterwert macht eine Aussage über die Lage des Punktes auf dieser Geraden. |
| **Tipp 8** | Geben Sie einen Normalenvektor von Ebene $E_1$ an. Was kann man über einen Normalenvektor paralleler Ebenen aussagen? |
| **Tipp 9** | Sie benötigen einen Normalenvektor von $E_3$ und einen Punkt auf $E_3$. |
| **Tipp 10** | Beim Aufdecken der Karten handelt es sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment mit „Ziehen ohne Zurücklegen“. |
| **Tipp 11** | Es handelt sich um „Ziehen ohne Zurücklegen“. Wie oft muss man höchstens ziehen? Zeichnen Sie den relevanten Teil des Baumdiagramms. |
| **Tipp 12** | Wie berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen einer Funktion f? |
| **Tipp 13** | „Am steilsten“ bedeutet: Die Steigung des Graphen ist auf dem angegebenen Definitionsbereich maximal oder minimal. |
| **Tipp 14** | Der Winkel zwischen der Stollenwand und der Horizontalen ist der Winkel zwischen der Tangente an den Graphen und der x-Achse. |
| **Tipp 15** | Ergänzen Sie Ihre Skizze durch die Gerade mit der Gleichung $y = 1{,}7$. Denken Sie an die Länge des Stollens! |
| **Tipp 16** | Tragen Sie in Ihrer Skizze die Lage L der Lampe und einen beliebigen Punkt $P(u \mid f(u))$, $u > 0$, auf dem Graphen ein. Wie können Sie aus den Koordinaten dieser beiden Punkte einen Term für den Abstand erhalten? |
| **Tipp 17** | Tragen Sie einen näherungsweise quadratischen Behälterquerschnitt in Ihre Skizze ein und bezeichnen Sie die auf dem Graphen liegende rechte obere Ecke mit $Q(u \mid f(u))$. |
| **Tipp 18** | Der Funktionsterm ist als Produkt von zwei Faktoren angegeben. Wenn ein Produkt den Wert 0 hat, dann hat wenigstens einer der Faktoren den Wert 0. |

2

| | |
|---|---|
| Tipp 19 | Der Graph zeigt die momentane Zuflussrate für jeden Zeitpunkt. |
| Tipp 20 | Es gibt zwei Zeitpunkte, an denen die momentane Zuflussrate 2000 Liter je Stunde beträgt. Wie finden Sie diese? |
| Tipp 21 | Wie zeigt sich am Graphen die stärkste Abnahme der momentanen Zuflussrate? |
| Tipp 22 | Wie können Sie aus der gegebenen momentanen Zuflussrate die insgesamt in einem gegebenen Zeitraum zugeflossene Wassermenge berechnen? |
| Tipp 23 | Jetzt kennen Sie das Volumen und suchen den Zeitpunkt. Stellen Sie eine Integralgleichung auf. |
| Tipp 24 | Die momentane Änderungsrate ergibt sich aus dem Zufluss und dem Abfluss von Wasser. |
| Tipp 25 | Die Wassermenge nimmt ab, wenn weniger zufließt als abfließt. |
| Tipp 26 | Beachten Sie, dass bei Beginn der Bewässerung bereits Wasser im Tank war. |
| Tipp 27 | Fertigen Sie eine Skizze an. Bestimmen Sie die Nullstellen von f. |
| Tipp 28 | Machen Sie einen allgemeinen Ansatz für eine ganzrationale Funktion g 2. Grades. |
| Tipp 29 | Geben Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte an.<br>Berechnen Sie die Koordinaten der Spurpunkte der Ebene E. |
| Tipp 30 | Bestimmen Sie jeweils einen Normalenvektor von E und der $x_1x_2$-Ebene. |
| Tipp 31 | Alle Punkte der $x_1$-Achse haben den gleichen Abstand von Ebene E. |
| Tipp 32 | Es ist entscheidend, an welcher Stelle der Koordinatengleichung der Parameter steht. |
| Tipp 33 | Bestimmen Sie die Hesse'sche Normalenform der Ebene $E_a$. |
| Tipp 34 | Machen Sie sich anhand der Zeichnung aus Teilaufgabe a) klar, wie sich die Lage von $E_a$ in Abhängigkeit von a verändert. |
| Tipp 35 | Es liegt eine Binomialverteilung vor. |
| Tipp 36 | Was ändert sich gegenüber der ersten Frage dieser Teilaufgabe? |
| Tipp 37 | Bestimmen Sie die Koordinaten von F, $M_1$ und $M_2$. |
| Tipp 38 | Überlegen Sie anhand der Skizze auf dem Aufgabenblatt, welche Seiten des Dreiecks gleich lang sein können. |
| Tipp 39 | Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $M_1M_2$. |
| Tipp 40 | Bestimmen Sie die Hesse'sche Normalenform der Ebene S. |
| Tipp 41 | Das obere Ende der Stange liegt auf einer zur Diagonalen AC parallelen Geraden. |
| Tipp 42 | Das Glücksspiel ist fair, falls der Erwartungswert für die Auszahlung genauso groß wie der Einsatz ist. |
| Tipp 43 | Welchen Wert muss der Erwartungswert für die Auszahlung jetzt annehmen? |
| Tipp 44 | Es handelt sich um einen linksseitigen Signifikanztest. |

## Folgende Tipps geben eine weitere Hilfestellung:

**Tipp 1** Beachten Sie bei der Anwendung der Produktregel auch die Kettenregel.

**Tipp 2** Eine Stammfunktion zu f mit $f(x) = \sin(2x)$ ist $-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$.
Daher gilt: $F(x) = -2\cdot\cos(2x) + c$.

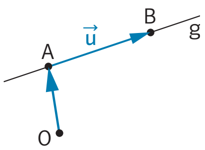
**Tipp 3** Beachten Sie: $(e^x)^2 = e^{2x}$

**Tipp 4** Die Maßzahl des Flächeninhalts der von zwei Graphen zu den Funktionen f und g eingeschlossenen Fläche erhalten Sie mithilfe eines Integrals mit den Grenzen $-3$ und 1.

**Tipp 5**
(1) Wie erhalten Sie den y-Wert eines Punktes auf dem Graphen einer Funktion f, wenn Sie den x-Wert kennen?
(2) Mit der Ableitung einer Funktion f an einer bestimmten Stelle berechnet man die Tangentensteigung.
(3) Welche besonderen Punkte eines Graphen berechnen Sie mithilfe der zweiten Ableitung der Funktion f?
(4) Wenn die Funktionswerte gegen 5 streben, erfolgt eine Annäherung des Graphen an eine Gerade. An welche?

**Tipp 6** Ein Normalenvektor von E ist der Richtungsvektor von g.
Die Koordinatenform der Ebenengleichung lautet: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = d$
Mit einer Punktprobe für C erhalten Sie damit den Wert für d.

**Tipp 7** Für welche Parameterwerte erhält man die Punkte A bzw. B?




**Tipp 8** Ein möglicher Normalenvektor ist $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Tipp 9** Wenn Sie auf Ebene $E_1$ einen Punkt A und auf $E_2$ einen Punkt B wählen, dann liegt der Mittelpunkt M der Strecke AB auf Ebene $E_3$. Zeichnen Sie.

**Tipp 10** Verwenden Sie eine Pfadregel.
Zeichnen Sie gegebenenfalls ein (reduziertes) Baumdiagramm.

**Tipp 11** Beachten Sie, dass sich von Zug zu Zug die Wahrscheinlichkeiten ändern.
Verwenden Sie die Pfadregeln.

**Tipp 12** Was können Sie über den Grad der zweiten Ableitungsfunktion f″ aussagen, wenn die ganzrationale Funktion f vom Grad 4 ist? Was heißt das für die maximale Anzahl der Nullstellen von f″?

**Tipp 13** Die Steigung des Graphen erhält man mithilfe der ersten Ableitung f′.
Verwenden Sie den GTR.

**Tipp 14** Die Weite $\alpha$ des Steigungswinkels einer Geraden mit der Steigung m ergibt sich aus $\tan(\alpha) = m$.
Hinweis: Rechner auf Gradmaß (DEG) einstellen!

**Tipp 15** Aus Symmetriegründen müssen Sie nur den rechts von der y-Achse liegenden Teil der Fläche berechnen. Sie setzt sich aus einem Rechteck und einem dreiecksähnlichen Flächenstück zusammen, das Sie mit einem Integral berechnen können (GTR).

| | |
|---|---|
| **Tipp 16** | Den Abstand der Punkte L und P erhalten Sie mit dem Satz des Pythagoras in Abhängigkeit von u. |
| **Tipp 17** | Wie lang sind die Seiten des Quadrats aufgrund der Bezeichnungen in Ihrer Skizze? Schreiben Sie damit eine Gleichung auf, aus der Sie u berechnen können (GTR). |
| **Tipp 18** | Der erste Faktor liefert die von t unabhängige Nullstelle 1. Der zweite Faktor liefert die Nullstelle $\ln(t)$.<br>Wie muss man t wählen, damit $\ln(t)$ überhaupt definiert ist? |
| **Tipp 19** | Welche Bedeutung hat der Hochpunkt des Graphen? |
| **Tipp 20** | Lösen Sie die Gleichung $r(t) = 2000$ (GTR).<br>Betrachten Sie den Graphen zwischen den berechneten Lösungen. |
| **Tipp 21** | Die Stelle der stärksten Abnahme ist eine Stelle mit negativer Steigung. Gesucht ist also die Stelle, an der der Betrag dieser negativen Steigung am größten ist. |
| **Tipp 22** | Die zugeflossene Wassermenge können Sie mithilfe eines Integrals berechnen (GTR). |
| **Tipp 23** | Die Integralgleichung lautet $\int_0^{t_4} r(t)\,dt = 5000$. Berechnen Sie $t_4$ (GTR). |
| **Tipp 24** | Die entnommene Wassermenge je Stunde ist konstant. |
| **Tipp 25** | Welche Bedeutung hat die Nullstelle der Funktion w? |
| **Tipp 26** | Die maximale Wassermenge ist zu dem Zeitpunkt $t_5$ erreicht, zu dem der Tankinhalt wieder abzunehmen beginnt. |
| **Tipp 27** | Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu f. Denken Sie auch an die „umgekehrte" Kettenregel. |
| **Tipp 28** | Formulieren Sie drei Bedingungen, die g erfüllen muss. |
| **Tipp 29** | Die Kantenlänge des Würfels ist 6 Längeneinheiten. Alle Koordinaten der Eckpunkte sind daher 0 oder 6.<br>Die Spurpunkte lesen Sie in der Achsenabschnittsform der Ebenengleichung ab. |
| **Tipp 30** | Ein Normalenvektor von E bzw. der $x_1x_2$-Ebene ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{n_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.<br>Berechnen Sie damit die Weite des gesuchten Winkels. |
| **Tipp 31** | Der Ursprung $O(0\,\|\,0\,\|\,0)$ liegt auf der $x_1$-Achse. Berechnen Sie den Abstand von O zur Ebene E mithilfe der Hesse'schen Normalenform von E. |
| **Tipp 32** | Alle Ebenen $E_a$ haben den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. |
| **Tipp 33** | Die Hesse'sche Normalenform der Ebene $E_a$ lautet $\frac{3x_2 + x_3 - a}{\sqrt{10}} = 0$.<br>Beachten Sie, dass bei der Abstandsberechnung eine Betragsgleichung zu lösen ist. |
| **Tipp 34** | Beachten Sie die Grenzlagen. Eine solche Grenzlage ergibt sich für $a = 0$. |
| **Tipp 35** | Es liegt eine $B_{3;0,1}$-Verteilung vor. X sei die Anzahl der Gewinnlose. Formulieren Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe von X. |
| **Tipp 36** | Es liegt eine $B_{n;0,1}$-Verteilung vor. Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit für verschiedene Werte von n mit dem GTR. |

| | |
|---|---|
| **Tipp 37** | Die gesuchten Punkte sind $F(8\|8\|8)$, $M_1(8\|0\|4)$ und $M_2(4\|0\|8)$. |
| **Tipp 38** | Berechnen Sie die Länge der Vektoren $\overrightarrow{FM_1}$ und $\overrightarrow{FM_2}$. |
| **Tipp 39** | $M(6\|0\|6)$; die Strecke MF ist eine Höhe des Dreiecks. |
| **Tipp 40** | Die Hesse'sche Normalenform der Ebene S lautet: $\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{3} = 0$ |
| **Tipp 41** | Das obere Ende der Stange liegt auf der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. |
| **Tipp 42** | X sei die Auszahlung in Euro. Welche Werte kann X annehmen? |
| **Tipp 43** | Stellen Sie eine Gleichung für den Erwartungswert der Auszahlung auf. |
| **Tipp 44** | Im Extremfall liegt eine $B_{500;\frac{1}{36}}$-Verteilung vor.<br>Welche Ungleichung ergibt sich aufgrund des Signifikanzniveaus? |

## Folgende Tipps helfen, Lücken zu schließen:

| | |
|---|---|
| **Tipp 1** | Bearbeiten Sie **F 15**, gegebenenfalls auch **F 11** bis **F 13** und **F 16**, **F 17** mit den entsprechenden Aufgaben. |
| **Tipp 2** | Bearbeiten Sie aus **F 41** das Beispiel 2 und die Aufgabe 3, aus **F 42** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1 b). |
| **Tipp 3** | Bearbeiten Sie aus **F 6** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben a), b) und c). |
| **Tipp 4** | Bearbeiten Sie aus **F 2** das Beispiel a) und die Aufgaben a) und d), aus **F 52** das Beispiel 1 und die Aufgaben a) und c). |
| **Tipp 5** | (1) Man berechnet den y-Wert eines Punktes auf dem Graphen einer Funktion f, indem man den x-Wert in die Funktionsgleichung einsetzt.<br>(2) Der Graph hat in $P(2\|1)$ eine waagrechte Tangente.<br>(3) Bearbeiten Sie aus **F 31** das Beispiel 1 und die Aufgabe a).<br>(4) Der Graph hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 5$. |
| **Tipp 6** | Bearbeiten Sie aus **F 121** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 und aus **F 125** das Beispiel 2, aus **F 133 a** das Beispiel und die Aufgabe 1 a). |
| **Tipp 7** | Der Punkt S gehört zum Parameterwert 2. |
| **Tipp 8** | Ob der Normalenvektor von $E_1$ zu den Spannvektoren von $E_2$ orthogonal ist, überprüfen Sie mit dem Skalarprodukt.<br>Bearbeiten Sie aus **F 108** das Beispiel und die Aufgabe, aus **F 151** den Sonderfall im Beispiel und die Aufgabe. |
| **Tipp 9** | In der Koordinatenform der Ebene $E_3$ erhalten Sie durch eine Punktprobe mit dem Punkt M den Wert von d.<br>Bearbeiten Sie aus **F 105** das Beispiel 2 und die Aufgabe, aus **F 124** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2. |
| **Tipp 10** | Bearbeiten Sie aus **F 201** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1, aus **F 202** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1. |
| **Tipp 11** | Bearbeiten Sie aus **F 211** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2. |

| | |
|---|---|
| **Tipp 12** | f″ hat maximal zwei Nullstellen. Es kann also höchstens zwei Wendepunkte geben. |
| **Tipp 13** | Beachten Sie die Symmetrie des Graphen von f. Zeichnen Sie mithilfe des GTR den Graphen von f′. Bestimmen Sie mit dem GTR den x-Wert des Tiefpunkts des Graphen von f′. |
| **Tipp 14** | Bearbeiten Sie aus **F 27** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1. |
| **Tipp 15** | Bearbeiten Sie aus **F 52** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2. |
| **Tipp 16** | Das Minimum der Zielfunktion bestimmen Sie mit dem GTR. |
| **Tipp 17** | Lösen Sie die Gleichung $f(u) = 2u$. |
| **Tipp 18** | Wie muss man t wählen, damit in diesem Fall beide Nullstellen zusammenfallen? |
| **Tipp 19** | Bestimmen Sie mit dem GTR den y-Wert des Hochpunkts. |
| **Tipp 20** | (CASIO) Verwenden Sie im RUN-Menü den Befehl SolvN, um die Gleichung zu lösen. (TI) Bestimmen Sie die Schnittstellen des Graphen von r und der Geraden mit der Gleichung $y = 2000$. |
| **Tipp 21** | Bestimmen Sie das Minimum von r′ mit dem GTR. |
| **Tipp 22** | Beachten Sie, dass der Tank zunächst leer ist. Bearbeiten Sie aus **F 82** das Beispiel und die Aufgabe. |
| **Tipp 23** | Bearbeiten Sie aus **F 82** das Beispiel. |
| **Tipp 24** | Beachten Sie, dass Wasser nur 9 Stunden lang entnommen wird. |
| **Tipp 25** | Die Nullstelle beschreibt den Zeitpunkt $t = 3$, ab dem w negative Funktionswerte annimmt. |
| **Tipp 26** | Die Wassermenge, die nach dem Zeitpunkt $t = 3$ noch hinzukommt, berechnen Sie mit $\int_3^{t_5} w(t)\,dt$. |
| **Tipp 27** | Bearbeiten Sie aus **F 41** das Beispiel 2 und die Aufgabe 3, und aus **F 51** die Aufgaben 1c) und 2b). |
| **Tipp 28** | Die drei Bedingungen lauten: 1. $g(0) = 0$ 2. $g(1) = 0$ 3. $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}A$<br>Lösen Sie das entstehende Gleichungssystem mit dem GTR. |
| **Tipp 29** | Bearbeiten Sie aus **F 111** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2.<br>Bearbeiten Sie aus **F 126** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2. |
| **Tipp 30** | Bearbeiten Sie aus **F 153a** das Beispiel und die Aufgabe 1. |
| **Tipp 31** | Bearbeiten Sie aus **F 166** das Beispiel und die Aufgabe. |
| **Tipp 32** | Bearbeiten Sie aus **F 181** das Beispiel 1a) und die Aufgabe 1a). |
| **Tipp 33** | Bearbeiten Sie aus **F 181** das Beispiel 1c) und die Aufgabe 1b). |
| **Tipp 34** | Bestimmen Sie die andere Grenzlage. Für welchen Wert von a liegt der Punkt $S(6\|6\|6)$ auf $E_a$? |
| **Tipp 35** | Bearbeiten Sie aus **F 231** das Beispiel 3 und die Aufgabe 1c). |
| **Tipp 36** | Bearbeiten Sie aus **F 235** das Beispiel 2 und die Aufgaben 1 und 2. |

| | |
|---|---|
| **Tipp 37** | Bearbeiten Sie aus **F 125** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 oder 2. |
| **Tipp 38** | Bearbeiten Sie aus **F 102** das Beispiel und die Aufgabe. |
| **Tipp 39** | Ein Dreieck mit der Grundseitenlänge g und der Höhe h hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.<br>Bearbeiten Sie aus **F 102** das Beispiel und die Aufgabe. |
| **Tipp 40** | Bearbeiten Sie aus **F 162** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1. |
| **Tipp 41** | Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene S.<br>Bearbeiten Sie aus **F 133a** das Beispiel und die Aufgabe 1. |
| **Tipp 42** | Bearbeiten Sie aus **F 222** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2. |
| **Tipp 43** | Bearbeiten Sie aus **F 223** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1. |
| **Tipp 44** | Bearbeiten Sie aus **F 241** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1 a). |

# Lösungen

## Pflichtteil

### Aufgabe 1

Anwendung der Produktregel und der Kettenregel ergibt:
$f'(x) = 4x \cdot e^{-2x} + (2x^2+5) \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$

$f'(x) = 4x \cdot e^{-2x} - 2 \cdot (2x^2+5) \cdot e^{-2x}$

Hinweis:
Eine weitere Vereinfachung wird hier nicht gefordert. Sie werden aber erkennen, dass Sie den Term $2 \cdot e^{-2x}$ noch ausklammern können. Dann ergibt sich:
$f'(x) = 2 \cdot e^{-2x} \cdot (-2x^2 + 2x - 5)$

F 15
F 16
F 17
F 11
F 12
F 13

### Aufgabe 2

Aus $f(x) = 4 \cdot \sin(2x)$ folgt zunächst: $F(x) = 4 \cdot (-\cos(2x)) \cdot \frac{1}{2} + c = -2 \cdot \cos(2x) + c$
Daraus erhält man: $F(\pi) = -2 \cdot \cos(2\pi) + c = -2 \cdot 1 + c = -2 + c$
Wegen $F(\pi) = 7$ ergibt sich $c = 9$.

Die Gleichung der Stammfunktion heißt $F(x) = -2 \cdot \cos(2x) + 9$.

F 41
F 42

### Aufgabe 3

| 1. Lösungsweg | | 2. Lösungsweg | |
|---|---|---|---|
| $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$ | $\mid \cdot e^x;\; e^x \neq 0$ | $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$ | $\mid \cdot e^x;\; e^x \neq 0$ |
| $2 \cdot (e^x)^2 - 4 = 0$ | $\mid +4$ | $2 \cdot (e^x)^2 - 4 = 0$ | $\mid +4$ |
| $2 \cdot (e^x)^2 = 4$ | $\mid :2$ | $2 \cdot (e^x)^2 = 4$ | $\mid :2$ |
| $(e^x)^2 = 2$ | \| Potenzsatz | $(e^x)^2 = 2$ | \| Wurzelziehen |
| $e^{2x} = 2$ | \| Logarithmieren | $e^x = \sqrt{2}$ | oder $e^x = -\sqrt{2}$ |
| $2x = \ln(2)$ | | $x_1 = \ln(\sqrt{2})$ | keine weitere Lösung |
| $x_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$ | | | |

Die gegebene Gleichung hat nur die Lösung $\frac{1}{2} \cdot \ln(2)$.

F 6

### Aufgabe 4

Berechnung der Schnittstellen der Graphen:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -x^2 + 3 &= 2x \qquad \mid -2x \\ -x^2 - 2x + 3 &= 0 \qquad \mid \cdot(-1) \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 1;\; x_2 = -3$$

F 52
F 41
F 43
F 2

Berechnung des Integrals:

$$\int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-3}^{1} (-x^2 + 3 - 2x)\,dx = \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1}$$
$$= \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + 3\cdot 1 - 1^2\right) - \left(-\tfrac{1}{3}\cdot(-3)^3 + 3\cdot(-3) - (-3)^2\right)$$
$$= \left(-\tfrac{1}{3} + 3 - 1\right) - (9 - 9 - 9)$$
$$= \tfrac{5}{3} - (-9)$$
$$= \tfrac{32}{3}$$

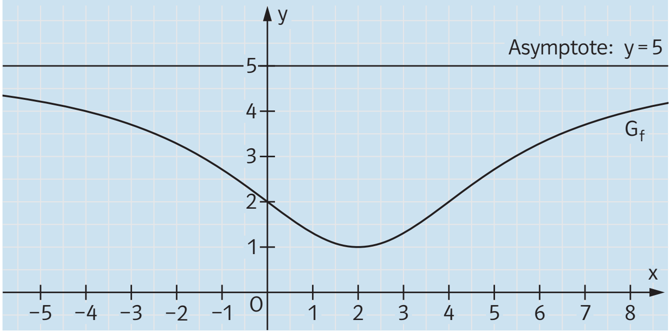
Der Flächeninhalt der von den beiden Graphen umschlossenen Fläche beträgt $\frac{32}{3}$ Flächeneinheiten.

## Aufgabe 5

Bedeutung für den Graphen:

(1) Der Punkt $P(2\,|\,1)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f.
(2) Die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt P ist 0. Die Tangente ist daher waagrecht.
(3) Der Graph hat den Wendepunkt $W(4\,|\,f(4))$.
(4) Der Graph hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 5$.

Skizze eines möglichen Graphen:




Anmerkung: Die Zeichnung der Asymptote ist nicht verlangt.

F 21
F 31
F 75

## Aufgabe 6

Gleichung der Geraden durch die Punkte $A(1\,|\,-1\,|\,3)$ und $B(2\,|\,-3\,|\,0)$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\left[\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

Gleichung der Ebene orthogonal zu g durch den Punkt $C(4\,|\,3\,|\,-8)$:
Als Normalenvektor von E kann der Richtungsvektor von g verwendet werden.
Die Koordinatenform der Ebenengleichung lautet daher $1\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - 3\cdot x_3 = d$.

Die Punktprobe mit dem Punkt $C(4\,|\,3\,|\,-8)$ ergibt $1\cdot 4 - 2\cdot 3 - 3\cdot(-8) = d$, also $d = 22$.
Eine Koordinatengleichung der Ebene E ist $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22$.

F 133a
F 121
F 101

Bestimmung des Schnittpunkts S von g und E:
Aus der Geradengleichung erhält man: $x_1 = 1+t,\ x_2 = -1-2t,\ x_3 = 3-3t$
Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt:
$$\begin{aligned} 1+t-2\cdot(-1-2t)-3\cdot(3-3t) &= 22\\ 1+t+2+4t-9+9t &= 22\\ 14t &= 28\\ t &= 2\end{aligned}$$
Einsetzen dieses Parameterwerts in die Geradengleichung ergibt den Ortsvektor $\vec{s}$ zum gesuchten Schnittpunkt: $\vec{s} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\-3\end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt von g und E ist daher $S(3\,|\,-5\,|\,-3)$.

Lage des Punktes S auf der Geraden g = (AB):
Wenn ein Punkt auf der Geraden g zwischen A und B liegt, dann hat der zugehörige Parameter t einen Wert zwischen 0 und 1.
Zum Punkt S gehört der Parameterwert 2.

S liegt nicht zwischen A und B.

## Aufgabe 7

Nachweis der Parallelität der Ebenen $E_1$ und $E_2$: F 134a

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene $E_1$. F 108

Wegen $\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot1-2\cdot1+1\cdot0 = 0$ und
$\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = 2\cdot1-2\cdot3+1\cdot4 = 0$ ist $\vec{n}$ orthogonal zu den beiden Spannvektoren der Ebene $E_2$ und folglich auch ein Normalenvektor der Ebene $E_2$.

Somit sind die beiden Ebenen zueinander parallel.

Bestimmung einer Gleichung für die Ebene $E_3$:
Da die Ebene $E_3$ parallel zu $E_1$ und $E_2$ ist, kann deren Normalenvektor $\vec{n}$ auch als Normalenvektor von $E_3$ verwendet werden.
Als Stützvektor kann man den Ortsvektor des Mittelpunkts M einer Strecke AB verwenden, wobei A auf der Ebene $E_1$ und B auf der Ebene $E_2$ beliebig gewählt werden können. F 105
Wählt man beispielsweise die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,-1)$ und $B(7\,|\,7\,|\,5)$, so ergibt sich für den Ortsvektor des Mittelpunkts M:
$$\vec{m} = \tfrac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\7\\5\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}3,5\\3,5\\2\end{pmatrix}$$

Eine Gleichung der Ebene $E_3$ ist daher z. B. $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3,5\\3,5\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 0.$ F 125

Anmerkung:
Eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform lautet $2x_1-2x_2+x_3 = 2$.

## Aufgabe 8

F 201
F 202

**a)** Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:
Erste Auswahl:
Neun Karten liegen auf dem Tisch, von denen fünf Karten keine Asse sind.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, keines von vier Assen zu wählen, beträgt somit $\frac{5}{9}$.

Zweite Auswahl:
Wenn nun bereits kein Ass ausgewählt wurde, liegen noch acht Karten auf dem Tisch, von denen vier Karten keine Asse sind.
Die Wahrscheinlichkeit für kein weiteres Ass beim zweiten Auswählen beträgt daher $\frac{4}{8}$.
Mit einer Pfadregel folgt: $P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$
Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B:
Von den neun Karten sind vier Asse und zwei Damen.

Erste Möglichkeit:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, zuerst ein Ass und dann eine Dame auszuwählen, beträgt nach einer Pfadregel $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8}$.
Zweite Möglichkeit:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, zuerst eine Dame und dann ein Ass auszuwählen, beträgt nach einer Pfadregel $\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8}$.

Daraus folgt: $P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

**b)** Mögliche Werte der Zufallsvariablen:

F 211

Beim Aufdecken kann gleich beim ersten Mal ein Ass erscheinen, aber auch erst beim zweiten, dritten, vierten, fünften oder sechsten Mal. Da von den neun Karten vier Asse sind, muss spätestens die sechste Karte ein Ass sein.

Die Zufallsvariable X kann daher die Werte 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annehmen.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X \leqq 2)$:
Hinweis: Hier liegt keine Binomialverteilung vor.
$P(X \leqq 2)$ bedeutet, dass beim ersten oder spätestens beim zweiten Mal ein Ass aufdeckt wird: $P(X \leqq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$
Bei vier Assen und neun Karten gilt: $P(X = 1) = \frac{4}{9}$

Bei der ersten Auswahl wird kein Ass mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$ aufgedeckt. Beim zweiten Auswählen wird dann ein Ass mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{8}$ aufgedeckt. Mit einer Pfadregel folgt: $P(X = 2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}$
Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgt daher:

$P(X \leqq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{18}$

## Aufgabe 9

F 31

Eine ganzrationale Funktion mit diesen Eigenschaften gibt es nicht.
Begründung: Mögliche Wendestellen sind die Nullstellen der zweiten Ableitung einer Funktion. Da die zweite Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion 4. Grades eine quadratische Funktion ist und diese höchstens zwei Nullstellen besitzt, kann es auch höchstens zwei Wendestellen geben.

# Wahlteil

## Aufgabe A 1.1

**a)** Steilste Stellen der Stollenwände:
Der Graph von f ist an den Stellen am steilsten, an denen der Graph der Ableitungsfunktion f′ Extremstellen hat.
Mit dem GTR ergeben sich die Extremstellen $x_1 \approx -2{,}614$ und $x_2 \approx 2{,}614$.

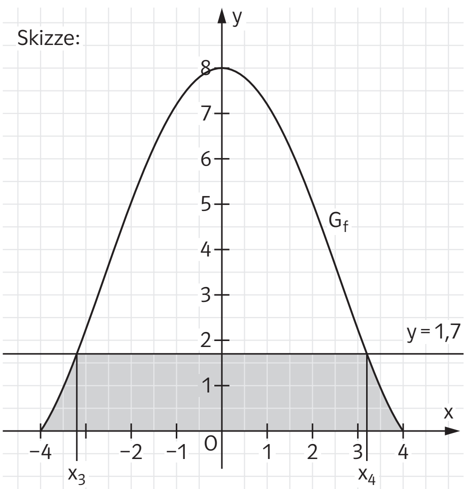
Die Stollenwände sind also etwa 2,6 Meter rechts und links der Stollenmitte am steilsten.

Winkel mit der Horizontalen:
Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Potenzen von x im Funktionsterm vorkommen. Daher muss die Winkelweite α nur an einer der beiden Stellen berechnet werden.
Der zu bestimmende Winkel an der steilsten Stelle $x_1$ ist der Winkel zwischen der Tangente an den Graphen an dieser Stelle und der x-Achse.
Es gilt: $\tan(\alpha) = f'(x_1) \approx 2{,}858$

F 27

Der Neigungswinkel an den steilsten Stellen hat etwa die Weite 70,7°.

Wasservolumen:
Die Skizze des Stollenquerschnitts veranschaulicht die Situation.
Die Gerade mit der Gleichung $y = 1{,}7$ schneidet den Graphen von f an den Stellen $x_3$ und $x_4$.
Mit dem GTR erhält man die Schnittstellen $x_3 \approx -3{,}20$ und $x_4 \approx 3{,}20$.
Der Teil der Querschnittsfläche, der mit Wasser gefüllt ist, kann in drei Flächenstücke zerlegt werden, deren Flächeninhalte berechnet werden können. Das linke und das rechte Flächenstück haben aus Symmetriegründen den gleichen Flächeninhalt. Das mittlere Flächenstück ist ein Rechteck.




Für die Maßzahl des Flächeninhalts gilt:

$$A = 2 \cdot \int_{x_4}^{4} f(x)\,dx + 2 \cdot x_4 \cdot 1{,}7$$

F 51
F 52

Für die Maßzahl des Volumens des 50 m langen Stollens folgt:

$$V = \left(2 \cdot \int_{x_4}^{4} f(x)\,dx + 2 \cdot x_4 \cdot 1{,}7\right) \cdot 50$$

Der GTR liefert dafür den Näherungswert 605,7.

Im Stollen befinden sich ungefähr 606 Kubikmeter Wasser.

F 33

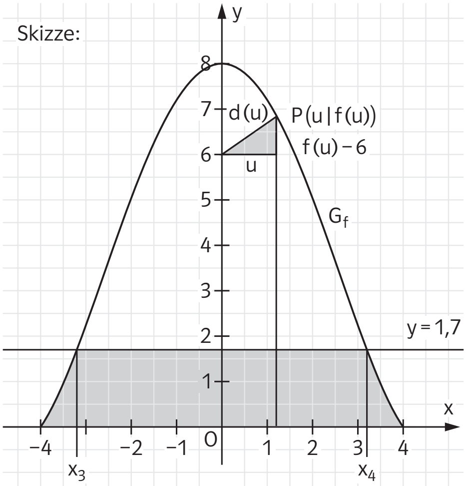
**b)** Aus Symmetriegründen wird die Lampe in Stollenmitte aufgehängt. Die Lage der punktförmig gedachten Lampe sei L(0|6). Der Abstand von L zu einem beliebigen Punkt P(u|f(u)) des Graphen von f wird mithilfe des Satzes des Pythagoras durch die Funktion d beschrieben. Dabei gilt:

$$d^2(u) = u^2 + (f(u)-6)^2$$

Da für die Abstandsfunktion nur nichtnegative Funktionswerte sinnvoll sind, folgt für die Zielfunktion d:

$$d(u) = \sqrt{u^2 + (f(u)-6)^2}$$

Skizze:




Mit dem GTR ergibt sich das Minimum der Funktionswerte: $d_{min} \approx 1{,}46$
Der Sicherheitsabstand von mindestens 1,4 Metern kann eingehalten werden.

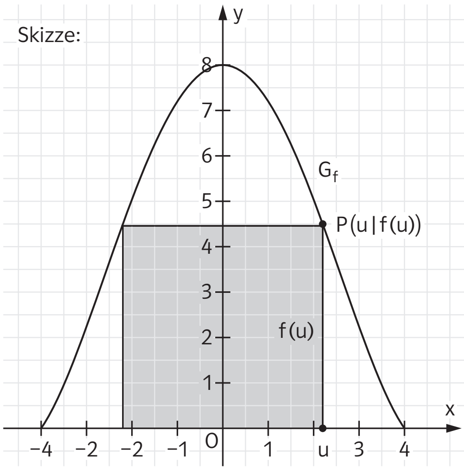
**c)** Auf dem Graphen von f wird ein Punkt P(u|f(u)), u > 0, gewählt und der rechteckige Behälterquerschnitt eingetragen. Da der Behälter einen quadratischen Querschnitt haben soll, ergibt sich für u die Bedingung:

$$2 \cdot u = f(u)$$

Mit dem GTR erhält man
$u_1 = 2{,}220\ldots$

Der Behälter darf höchstens etwa 4,44 m breit sein.

Skizze:




## Aufgabe A 1.2

F 1
F 6
F 91

Berechnung der Nullstellen von $f_t$:

$$(x-1)\cdot\left(1-\tfrac{1}{t}\cdot e^x\right) = 0$$

$$x-1 = 0 \quad \text{oder} \quad 1-\tfrac{1}{t}\cdot e^x = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \text{oder} \quad e^x = t$$

Unabhängig vom Parameterwert t ($t \neq 0$) ist 1 Nullstelle aller Funktionen $f_t$.

Parameterwerte, für die $f_t$ zwei verschiedene Nullstellen besitzt:
Die Gleichung $e^x = t$ hat nur für $t > 0$ Lösungen, und zwar die Lösung $x_2 = \ln(t)$.
Diese Lösung fällt mit der ersten Lösung $x_1 = 1$ zusammen, falls $\ln(t) = 1$, also $t = e$ gilt. In diesem Fall gibt es nur diese eine Nullstelle.
Die Lösung der Gleichung $e^x = t$ ist von der ersten Lösung verschieden, falls $\ln(t) \neq 1$, also $t \neq e$ gilt.

Wenn $t > 0$ und $t \neq e$ gilt, besitzt $f_t$ zwei Nullstellen.

## Aufgabe A 2.1

F 82

**a)** Bestimmung der maximalen momentanen Zuflussrate:
Mit dem GTR wird der Hochpunkt $H^*(1{,}386\,|\,2500)$ des Graphen von r bestimmt.

Die maximale momentane Zuflussrate beträgt somit 2500 Liter je Stunde.

Zeitraum, in dem die momentane Zuflussrate größer als 2000 Liter je Stunde ist:
Für den Grenzfall, dass die momentane Zuflussrate 2000 Liter je Stunde beträgt, ist die Gleichung $s(t) = 2000$ zu lösen.
Mit dem GTR erhält man die Lösungen $t_1 \approx 0{,}647$ und $t_2 \approx 2{,}572$.

Die momentane Zuflussrate ist folglich von etwa 0,6 Stunden bis etwa 2,6 Stunden nach Beginn des Regens größer als 2000 Liter je Stunde.

Zeitpunkt der stärksten Abnahme der Zuflussrate:
Die Änderung der Zuflussrate wird durch die Ableitungsfunktion r′ beschrieben.
Die Abnahme ist am größten, wenn die Funktion r′ ihr Minimum annimmt.
Mit dem GTR zeichnet man den Graphen von r′ und liest die Minimumstelle $t_3 \approx 2{,}773$ ab.

Die momentane Zuflussrate nimmt etwa 2,8 Stunden nach Regenbeginn am stärksten ab.

**b)** Inhalt des Wassertanks drei Stunden nach Regenbeginn:

Der Zufluss in den ersten drei Stunden wird beschrieben durch $\int_0^3 r(t)\,dt$.

Der GTR ergibt dafür den Näherungswert 6035,3.

Nach drei Stunden sind etwa 6035 Liter Wasser im Tank.

Zeitpunkt, zu dem 5000 Liter Wasser im Tank sind:

Es ist derjenige Wert $t_4$ zu bestimmen, für den gilt: $\int_0^{t_4} r(t)\,dt = 5000$.

Aus dieser Bedingung erhält man mit dem GTR $t_4 \approx 2{,}456$.

Nach ungefähr 2,5 Stunden sind 5000 Liter Wasser im Tank.

**c)** Wasserentnahme in den ersten 12 Stunden:
Wasser wird erstmals drei Stunden nach Regenbeginn entnommen. Am Funktionsterm der Funktion w, die die Änderungsrate des Wasservolumens im Tank beschreibt, kann abgelesen werden, dass stündlich und unabhängig vom jeweiligen Zeitpunkt 400 Liter entnommen werden. Diese Entnahme erfolgt insgesamt 9 Stunden lang.

In den ersten 12 Stunden werden demzufolge 3600 Liter Wasser entnommen.

Zeitpunkt, zu dem die Wassermenge im Tank abnimmt:
Die Wassermenge im Tank nimmt von dem Zeitpunkt an ab, zu dem sich die Änderungsrate des Tankinhalts von positiven zu negativen Werten ändert.
Es ist demnach die Nullstelle der Funktion w zu bestimmen.
Der GTR liefert als Lösung der Gleichung $w(t) = 0$ den Näherungswert $t_5 \approx 6{,}352$.

Ab etwa 6,4 Stunden nach Regenbeginn nimmt die Wassermenge im Tank ab.

Maximale Wassermenge im Tank:
Nach Teilaufgabe b) sind drei Stunden nach Regenbeginn bereits etwa 6035,3 Liter Wasser im Tank. Die maximale Wassermenge ist entsprechend vorheriger Berechnung nach insgesamt 6,352 Stunden erreicht. Die maximale Wassermenge ermittelt man mit dem GTR.

Es gilt: $6035{,}3 + \int_3^{6{,}352} w(t)\,dt \approx 7841{,}6.$

Die maximale Wassermenge im Tank beträgt etwa 7842 Liter.

## Aufgabe A 2.2

F 51 F 41 F 43

Berechnung des Flächeninhalts:

$$\int_0^1 \sin(\pi \cdot x)\,dx = \left[-\tfrac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot x)\right]_0^1 = -\tfrac{1}{\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) = -\tfrac{1}{\pi} \cdot (-1 - 1) = \tfrac{2}{\pi}$$

Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt $\frac{2}{\pi}$ Flächeneinheiten.

F 61

Bestimmung einer Funktionsgleichung der Funktion g:
1. Lösungsweg:
Jede ganzrationale Funktion g zweiten Grades mit den Nullstellen 0 und 1 lässt sich beschreiben durch eine Gleichung der Form $g(x) = a \cdot x \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Die Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse liegt oberhalb der x-Achse, falls $a < 0$ gewählt wird. Da diese Fläche halb so groß sein soll wie die vorher berechnete, muss a noch die folgende Bedingung erfüllen:

$$a \cdot \int_0^1 x \cdot (x - 1)\,dx = \tfrac{1}{\pi}$$

Mit dem GTR erhält man $a \approx -1{,}91$.

Die Funktion g kann näherungsweise durch $g(x) = -1{,}91 \cdot x \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, beschrieben werden.

F 61 F 9

2. Lösungsweg:
Ansatz für die Funktionsgleichung: $g(x) = ax^2 + bx + c$

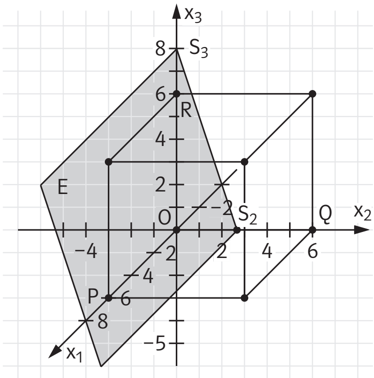
| | | |
|---|---|---|
| Punktprobe für $P(0 \mid 0)$, d.h. $g(0) = 0$: | (I) | $c = 0$ |
| Punktprobe für $Q(1 \mid 0)$, d.h. $g(1) = 0$: | (II) | $a + b + c = 0$ |
| Bedingung für den Flächeninhalt, d.h. $\int_0^1 (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{1}{\pi}$ | (III) | $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = \frac{1}{\pi}$ |

Der GTR liefert $a \approx -1{,}91$, $b \approx 1{,}91$.
Die Funktionsgleichung von g lautet näherungsweise: $g(x) = -1{,}91\,x^2 + 1{,}91\,x$

Bei beiden Lösungswegen ergibt eine exakte Berechnung
$g(x) = -\frac{6}{\pi} \cdot x \cdot (x - 1) = -\frac{6}{\pi}x^2 + \frac{6}{\pi}x.$

## Aufgabe B 1.1

**a)** Darstellung des Würfels und der Ebene E:
Abbildung in halber Originalgröße




Hinweise für die Zeichnung:
Die Gleichung der Ebene in Achsenabschnittsform lautet

$\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 = 1$ oder $\frac{x_2}{\frac{8}{3}} + \frac{x_3}{8} = 1.$

Damit kennt man die Spurpunkte $S_2\left(0 \left| \frac{8}{3} \right| 0\right)$ und $S_3(0|0|8)$. Es gibt keinen gemeinsamen Punkt mit der $x_1$-Achse. Die Ebene ist also parallel zu dieser Achse.

Weite α des Winkels zwischen der Ebene E und der $x_1x_2$-Ebene:

Ein Normalenvektor der Ebene E ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor der $x_1x_2$-Ebene ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Daher gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Der Schnittwinkel zwischen den beiden Ebenen hat näherungweise die Weite 71,6°.

Abstand der Ebene E von der $x_1$-Achse:
Da die Ebene E parallel zur $x_1$-Achse ist, haben alle Punkte der $x_1$-Achse den gleichen Abstand von der Ebene. Für die Abstandsberechnung wählt man einen dieser Punkte aus, beispielsweise den Ursprung O des Koordinatensystems.

Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung:

Allgemein gilt: $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

Die Hesse'sche Normalenform von E lautet: $\frac{0x_1 + 3x_2 + 1x_3 - 8}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{10}} = 0$

Abstand des Punktes O von E: $d(O;E) = \frac{|3 \cdot 0 + 0 - 8|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = 2{,}529\ldots$

Die Ebene E hat von der $x_1$-Achse näherungsweise den Abstand 2,53 Längeneinheiten.

**b)** Gegenseitige Lage der Ebenen der gegebenen Ebenenschar:

Alle Ebenen der Schar $E_a\colon\ 3x_2 + x_3 = a,\ a \in \mathbb{R}$, haben den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Demzufolge sind alle Ebenen dieser Schar zueinander parallel.

Bestimmung der Werte von a:
Hesse'sche Normalenform von $E_a$: $\frac{0x_1 + 3x_2 + 1x_3 - a}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{3x_2 + x_3 - a}{\sqrt{10}} = 0$

Abstand des Punktes $S(6|6|6)$ von $E_a$: $d(S;E) = \frac{|3 \cdot 6 + 6 - a|}{\sqrt{10}} = \frac{|24 - a|}{\sqrt{10}}$

F 111
F 126
F 153a
F 108
F 166
F 181

Bedingung: $d(S; E_a) = \frac{|24 - a|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Daraus folgt: $|24 - a| = 10$

$24 - a = 10$ oder $24 - a = -10$

$a_1 = 14$ oder $a_2 = 34$

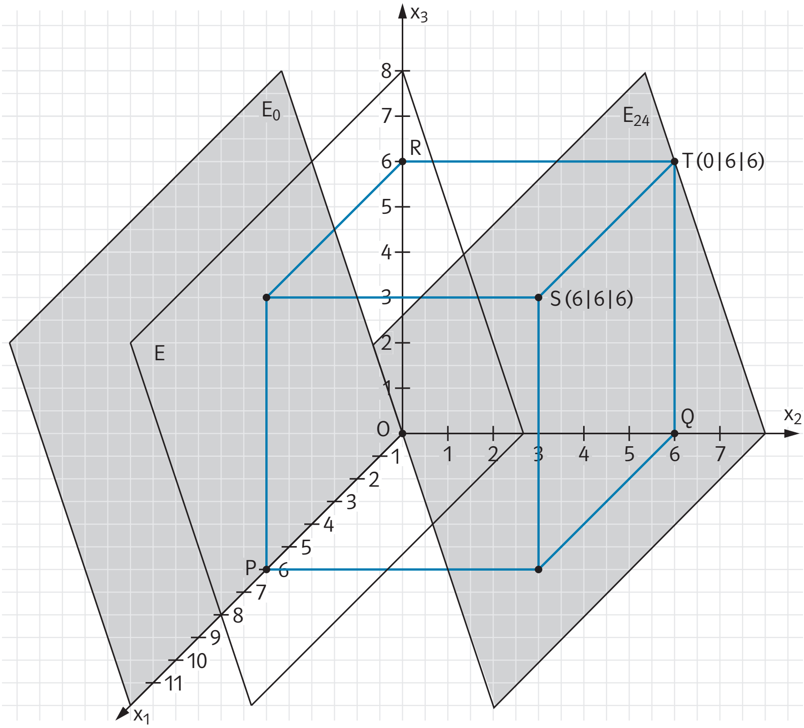
Der Punkt S hat für $a_1 = 14$ und $a_2 = 34$ den Abstand $\sqrt{10}$.

Hinweis: Die Betragsgleichung kann auch mit dem GTR gelöst werden.

F 162

F 7

Gemeinsame Punkte der Ebene $E_a$ mit dem Würfel:
Veranschaulichung:




F 182

Da alle Ebenen $E_a$ zueinander parallel sind, wird in der Abbildung die gegebene Ebene E solange in Richtung der $x_2$-Achse verschoben gedacht, bis sie nur noch die Kante OP bzw. die Kante TS mit dem Würfel gemeinsam hat. Jede Ebene $E_a$ zwischen diesen beiden Grenzlagen hat ebenfalls mit dem Würfel gemeinsame Punkte.

Bestimmung der Parameterwerte für die Grenzlagen:
Wenn O auf einer der Ebenen $E_a$ mit der Gleichung $3x_2 + x_3 = a$ liegt, so erhält man $3 \cdot 0 + 0 = a$, also $a_3 = 0$.
Wenn S(6|6|6) auf einer der Ebenen $E_a$ mit der Gleichung $3x_2 + x_3 = a$ liegt, so erhält man $3 \cdot 6 + 6 = a_3$, also $a_3 = 24$.

F 181

Jede Ebene $E_a$ mit $0 \leqq a \leqq 24$ hat also gemeinsame Punkte mit dem Würfel.

## Aufgabe B 1.2

Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose:
Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 3 vor. X sei die Anzahl der Gewinnlose.
Für die Trefferwahrscheinlichkeit gilt: $p = 0{,}1$
Es liegt also eine $B_{3;0,1}$-Verteilung vor.

Es gilt: $P(X \geqq 2) = 1 - P(X \leqq 1) = 0{,}028$ (GTR)

F 231

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter drei Losen mindestens zwei Gewinnlose sind, beträgt 2,8 %.

Es gibt GTR-Modelle, die die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqq 2)$ direkt berechnen können.

Anzahl der Lose, die man mindestens kaufen müsste:
Die Länge n der Bernoulli-Kette ist gesucht. Dabei soll gelten:
$P(X \geqq 2) = 1 - P(X \leqq 1) > 0{,}5$
Da n eine natürliche Zahl sein muss, kann man diese Aufgabe nicht mit dem Solver des GTR lösen.
Man erstellt eine Wertetabelle für $1 - P(X \leqq 1)$ mit variablem n und bestimmt so das kleinste n, für das die Bedingung erfüllt ist.

Dabei liegt eine $B_{n;0,1}$-Verteilung vor.

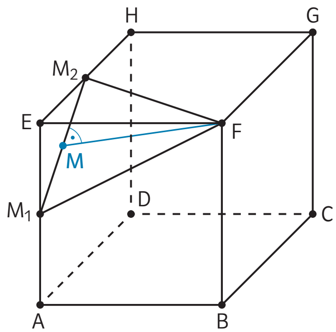
F 235

| n | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|
| $1 - P(X \leqq 1)$ | 0,4510 | 0,4853 | 0,5182 |

Man muss mindestens 17 Lose kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50 % liegt.

## Aufgabe B 2.1

**a)** Koordinatengleichung der Ebene S:
Da der Würfel die Kantenlänge 8 Längeneinheiten hat und die Koordinaten der Eckpunkte A, C und H angegeben sind, lässt sich erkennen, dass D der Koordinatenursprung ist und die Kanten DA auf der $x_1$-Achse, DC auf der $x_2$-Achse und DH auf der $x_3$-Achse liegen.
Damit sind die Koordinaten der Eckpunkte des Segeltuchs bekannt: $F(8|8|8)$, $M_1(8|0|4)$, $M_2(4|0|8)$




F 111

Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt:
Die Koordinatengleichung hat die Form: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.
Punktprobe für den Punkt $F(8|8|8)$ ergibt: (I) $8a + 8b + 8c = d$
Punktprobe für den Punkt $M_1(8|0|4)$ ergibt: (II) $8a + 4c = d$
Punktprobe für den Punkt $M_2(4|0|8)$ ergibt: (III) $4a + 8c = d$
Die Variable d ist frei wählbar, z. B. $d = 1$.
Mit dem GTR erhält man die Lösung des Gleichungssystems:
$a = \frac{1}{12},\ b = -\frac{1}{24},\ c = \frac{1}{12},\ d = 1.$

F 125

Multiplikation aller Koeffizienten mit 24 liefert eine Ebenengleichung.

Eine Koordinatengleichung der Ebene S heißt $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$.

Nachweis der Gleichschenkligkeit des Dreiecks $M_1FM_2$:
Die Längen der Dreiecksseiten werden berechnet. Man erhält:

$$\left|\overrightarrow{M_1F}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+8^2+4^2} = \sqrt{80}$$

F 101 F 102 F 105

$$\left|\overrightarrow{M_2F}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\8\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+8^2+0^2} = \sqrt{80}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+0^2+4^2} = \sqrt{32}$$

Die Dreiecksseiten M1F und M2F sind gleich lang. Das Dreieck $M_1FM_2$ ist daher gleichschenklig.

Flächeninhalt des Dreiecks $M_1FM_2$:
Die Länge der Grundseite $M_1M_2$ ist von oben bekannt: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{32}$
Die zugehörige Höhe ist die Strecke MF, wobei M der Mittelpunkt der Strecke $M_1M_2$ ist.
Mit $M(6\,|\,0\,|\,6)$ erhält man:

F 105 F 101 F 102

$$\left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+8^2+2^2} = \sqrt{72}$$

Für den Flächeninhalt A gilt: $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MF}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{72} = 24$

Der Flächeninhalt des Segeltuchs beträgt 24 Quadratmeter.

Alternativer Lösungsweg mithilfe des Kreuzprodukts:
Für den Flächeninhalt des von den Vektoren $\overrightarrow{M_1M_2}$ und $\overrightarrow{M_1F}$ aufgespannten Parallelogramms gilt $A = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1F}\right|$. Den Flächeninhalt des Dreiecks $M_1FM_2$ erhält man daher mit $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1F}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\8\\4\end{pmatrix}\right| = 24.$

Abstand des Segeltuchs von Ecke E:
Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung von S:

$$\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{3} = 0$$

Abstand der Ecke E von der Ebene S: $d(E;S) = \frac{|2\cdot 8 + 1\cdot 0 + 2\cdot 8 - 24|}{3} = \frac{|8|}{3} = \frac{8}{3}$

F 162

Die Ecke E hat von der Ebene des Segeltuchs etwa den Abstand 2,7 Meter.

**b)** Das obere Ende der Stange liegt auf der Parallelen zur Diagonale durch die Punkte A und C im Abstand 6 Meter über der Bodenfläche des Würfels. Diese Gerade g geht beispielsweise durch den Punkt $U(8\,|\,0\,|\,6)$ auf der Kante AE.

Gleichung der Geraden g:

$$\vec{x} = \vec{u} + t\cdot(\vec{c} - \vec{a}) = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + t\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}$$

F 121

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Schnittpunkt P der Geraden g mit der Ebene S:
Durch Einsetzen in die Koordinatengleichung von S erhält man eine Bestimmungsgleichung für den Parameterwert s des Punktes P.

$$\begin{aligned} 2\cdot(8-1\cdot s)-1\cdot(0+1\cdot s)+2\cdot(6+0\cdot s) &= 24 \\ 16-2s-s+12 &= 24 \\ 28-3s &= 24 \\ -3s &= -4 \\ s &= \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

F 133a

F 1

Damit ergibt sich der Ortsvektor $\vec{p}$ von P:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch im Punkt $P\left(\frac{20}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|6\right)$.

Demzufolge befindet sich das untere Ende der Stange im Punkt $Q\left(\frac{20}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|0\right)$.

## Aufgabe B 2.2

**a)** Nachweis, dass das Spiel fair ist:
X sei die Auszahlung in €. Es gilt: $X \in \{0;0{,}2;0{,}85;2\}$
Damit das Spiel fair ist, muss der Erwartungswert für die Auszahlung gleich dem Einsatz sein: $E(X) = 0{,}2$

Für die Wahrscheinlichkeiten der Auszahlungen gilt:

| X | 0,2 | 0,85 | 2 |
|---|---|---|---|
| P(X) | $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ |

F 221

Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}2 + \frac{1}{9}\cdot 0{,}85 + \frac{1}{36}\cdot 2 = 0{,}2$

F 222

Das Spiel ist also fair.

Berechnung des neuen Auszahlungsbetrags:
Wenn der Veranstalter auf lange Sicht 5 Cent pro Spiel gewinnen will, darf der Erwartungswert für die Auszahlung nur noch 0,15 betragen.

Der Auszahlungsbetrag für „Diamant – Diamant" sei d.

Für den Erwartungswert muss gelten: $E(X) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}2 + \frac{1}{9}\cdot d + \frac{1}{36}\cdot 2 = 0{,}15$

Der GTR liefert als Lösung dieser Gleichung: $d = 0{,}4$

F 223

Der Auszahlungsbetrag für „Diamant – Diamant" muss 0,4 € betragen.

**b)** Formulierung der Entscheidungsregel:
Nullhypothese $H_0$: $p \geqq \frac{1}{36}$; Gegenhypothese $H_1$: $p < \frac{1}{36}$

Es liegt ein linksseitiger Hypothesentest vor.
X beschreibt, wie oft das Ereignis „Stern – Stern" auftritt.
Stichprobenumfang: $n = 500$
Signifikanzniveau (maximal vereinbarte Irrtumswahrscheinlichkeit): $5\,\% = 0{,}05$
Im Extremfall liegt eine $B_{500;\frac{1}{36}}$-Verteilung vor.

F 241

Gesucht ist das größte g, für das gilt: $P(X \leqq g) \leqq 0{,}05$

Man erstellt mit dem GTR eine Wertetabelle für die kumulierte Binomialverteilung:

| $g$ | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|
| $P(X \leqq g)$ | 0,0142 | 0,0319 | 0,0629 |

Der GTR liefert: $g = 7$

Alternative: Falls der GTR über einen inversen Binomialbefehl verfügt, kann man $g+1$ direkt mit dem GTR berechnen.

Der GTR liefert: $g+1 = 8$, also $g = 7$.

Man lehnt die Nullhypothese ab, falls höchstens sieben Mal das Ereignis „Stern – Stern“ eintritt, anderenfalls wird $H_0$ nicht abgelehnt.