Abitur 2014

Aufgaben

Pflichtteil

Aufgabe 1

2 VP Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$. — Tipp 1

Aufgabe 2

2 VP Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\,dx$. — Tipp 2

Aufgabe 3

3 VP Lösen Sie die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$. — Tipp 3

Aufgabe 4

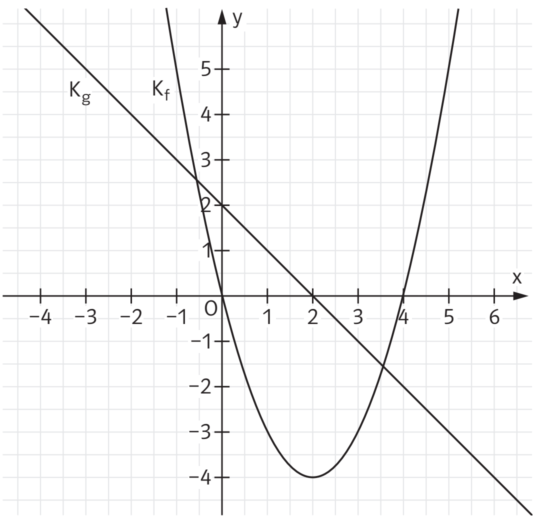
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$.

a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält. — Tipp 4

4 VP **b)** Bestimmen Sie die Nullstellen von g für $0 \leq x \leq 4$. — Tipp 5

Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g.



a) Bestimmen Sie $f(g(3))$. Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f(g(x)) = 0$ ist. — Tipp 6

b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Bestimmen Sie $h'(2)$. — Tipp 7

4 VP

Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebenen $E\colon\ x_1 + x_2 = 4$ und $F\colon\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F an. Tipp 8

b) Die Ebene G ist parallel zur x_1-Achse und schneidet die x_2x_3-Ebene in derselben Spurgeraden wie die Ebene F.
5 VP Geben Sie eine Gleichung der Ebene G an. Tipp 9

Aufgabe 7

Gegeben sind die Punkte $A(1\,|\,10\,|\,1)$, $B(-3\,|\,13\,|\,1)$ und $C(2\,|\,3\,|\,1)$.

Die Gerade g verläuft durch A und B.

4 VP Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g. Tipp 10

Aufgabe 8

An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

Tipp 11

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
3 VP Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal? Tipp 12

Aufgabe 9

Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene.
Die Kugel berührt diese Ebene.

Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührpunkt
3 VP bestimmen kann. Tipp 13

Wahlteil **Analysis**

Aufgabe A 1.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0{,}5x}$.
Ihr Graph sei K.

a) K besitzt einen Extrempunkt und einen Wendepunkt.
Geben Sie deren Koordinaten an.
Geben Sie eine Gleichung der Asymptote von K an.
4 VP Skizzieren Sie K. Tipp 14

b) Für jedes $u > 0$ sind $O(0\,|\,0)$, $P(u\,|\,0)$ und $Q(u\,|\,f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie einen Wert für u so, dass dieses Dreieck den Flächeninhalt 8 hat. Tipp 15
4 VP Für welchen Wert von u ist das Dreieck OPQ gleichschenklig? Tipp 16

c) Auf der x-Achse gibt es Intervalle der Länge 3, auf denen die Funktion f den Mittelwert 2,2 besitzt.
3 VP Bestimmen Sie die Grenzen eines solchen Intervalls. Tipp 17

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist für jedes $t > 0$ eine Funktion f_t durch $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$.

Bestimmen Sie t so, dass die beiden Extrempunkte des Graphen von f_t den
4 VP Abstand 13 voneinander haben. Tipp 18

Aufgabe A 2.1

Die Anzahl ankommender Fahrzeuge vor einem Grenzübergang soll modelliert werden. Dabei wird die momentane Ankunftsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000}; \quad 0 \leqq t \leqq 30$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn; f(t) in Fahrzeuge pro Stunde).
Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f. — Tipp 19
Wann ist die momentane Ankunftsrate maximal? — Tipp 20
Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden
4 VP ankommen. — Tipp 21

b) Am Grenzübergang werden die Fahrzeuge möglichst schnell abgefertigt, jedoch ist die momentane Abfertigungsrate durch 110 Fahrzeuge pro Stunde begrenzt.
Wann beginnen sich die Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen? — Tipp 22
Wie viele Fahrzeuge stauen sich maximal vor dem Grenzübergang? — Tipp 23
Welches Ergebnis erhielte man, wenn die momentane Abfertigungsrate 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn auf konstant 220 Fahrzeuge
6 VP pro Stunde erhöht würde? — Tipp 24

Aufgabe A 2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2; \quad -\pi < x < \pi.$$

Der Graph von f_a ist G_a.

a) G_a besitzt einen Extrempunkt.
2 VP Bestimmen Sie dessen Koordinaten. — Tipp 25

3 VP **b)** Durch welche Punkte der y-Achse verläuft kein Graph G_a? — Tipp 26

Wahlteil **Analytische Geometrie / Stochastik**

Aufgabe B 1.1

Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|0)$, $B(5|5|0)$, $C(-5|5|0)$ und $D(-5|-5|0)$.
Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(0|0|12)$.

a) Die Seitenfläche BCS liegt in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E. — Tipp 27
Berechnen Sie den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird. — Tipp 28
4 VP Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCS. — Tipp 29

b) Betrachtet werden nun Quader, die jeweils vier Eckpunkte auf den Pyramidenkanten und vier Eckpunkte in der Grundfläche der Pyramide haben. Einer dieser Quader hat den Eckpunkt $Q(2{,}5|2{,}5|0)$.
Berechnen Sie sein Volumen. — Tipp 30
Bei einem anderen dieser Quader handelt es sich um einen Würfel.
4 VP Welche Koordinaten hat dessen Eckpunkt auf der Kante BS? — Tipp 31

Aufgabe B 1.2

In einem Gefäß G1 sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.
In einem Gefäß G2 sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a) Aus Gefäß G1 wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird. — Tipp 32
Aus Gefäß G2 wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln
4 VP gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinander folgenden Zügen. — Tipp 33

b) Nun werden aus G1 zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß G2 gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus G2 gezogen.
3 VP Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz? — Tipp 34

Aufgabe B 2.1

An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten $A(10|6|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|3)$ und $D(10|0|3)$ ist im Punkt $F(5|6|0)$ ein 2 m langer Stab befestigt, der in positive x_3-Richtung zeigt.
Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich zunächst im Punkt $L(8|10|2)$.
(Koordinatenangaben in m).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt. — Tipp 35
Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar. — Tipp 36
Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte. — Tipp 37
3 VP (Teilergebnis E: $x_2 + 2x_3 = 6$)

b) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes. — Tipp 38
3 VP Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt. — Tipp 39

c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus auf einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Kreisbahn, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist. Dabei kollidiert die Lichtquelle mit der Platte.
3 VP Berechnen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte. — Tipp 40

Aufgabe B 2.2

Bei der Produktion von Bleistiften beträgt der Anteil fehlerhafter Stifte erfahrungsgemäß 5 %.

a) Ein Qualitätsprüfer entnimmt der Produktion zufällig 800 Bleistifte.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte in dieser Stichprobe.
Berechnen Sie $P(X \leqq 30)$. — Tipp 41
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht der Wert von X um weniger als 10
3 VP vom Erwartungswert von X ab? — Tipp 42

b) Der Betrieb erwirbt eine neue Maschine, von der behauptet wird, dass höchstens 2 % der von ihr produzierten Bleistifte fehlerhaft sind. Diese Hypothese H_0 soll mithilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten Stiften überprüft werden.
Bei welchen Anzahlen fehlerhafter Stifte entscheidet man sich gegen die Hypothese, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit maximal 5 % betragen
3 VP soll? — Tipp 43

Tipps

Folgende Tipps geben eine erste Hilfestellung:

Tipp 1	Die Funktion ist das Produkt zweier Funktionen. Verwenden Sie daher die Produktregel.
Tipp 2	Schreiben Sie den Funktionsterm zuerst mit negativer Hochzahl.
Tipp 3	Formen Sie die Gleichung so um, dass auf der rechten Seite 0 steht.
Tipp 4	Beachten Sie: Es gibt Verschiebungen und Streckungen in Richtung der x-Achse und der y-Achse. Die Reihenfolge der Abbildungen kann eine Rolle spielen. Wie entsteht der Graph von h mit $h(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ aus dem Graphen von f mit $f(x) = \cos(x)$?
Tipp 5	Was folgt aus $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 1$ für x?
Tipp 6	Machen Sie sich den Unterschied zwischen der Verkettung zweier Funktionen und dem Produkt zweier Funktionen klar.
Tipp 7	Welche Ableitungsregel müssen Sie anwenden?
Tipp 8	Bestimmen Sie die Spurpunkte der Ebenen E und F. Tragen Sie die Schnittgerade der Ebenen in der Abbildung ein.
Tipp 9	Wie erkennt man an der Koordinatengleichung, dass die Ebene parallel zur x_1-Achse ist?
Tipp 10	Eine Methode der Abstandsbestimmung verwendet eine Hilfsebene.
Tipp 11	Es liegt ein Bernoulli-Experiment vor.
Tipp 12	Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 4 vor.
Tipp 13	Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt anhand einer geeigneten Skizze.
Tipp 14	Skizzieren Sie zuerst den Graphen (GTR) und beantworten Sie damit die Fragen.
Tipp 15	Skizzieren Sie das rechtwinklige Dreieck OPQ und geben Sie seine Flächeninhaltsmaßzahl in Abhängigkeit von u an.
Tipp 16	Welche beiden Seiten des rechtwinkligen Dreiecks OPQ können gleich lang werden?
Tipp 17	Wählen Sie als linke Intervallgrenze beispielsweise die Variable a.
Tipp 18	Berechnen Sie zunächst die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von t.
Tipp 19	Skizzieren Sie zuerst den Graphen (GTR). Wählen Sie geeignete Einstellungen im Zeichenfenster.
Tipp 20	Beachten Sie: Der Graph beschreibt die Ankunftsrate.
Tipp 21	Wie können Sie aus der momentanen Ankunftsrate die insgesamt ankommende Anzahl von Fahrzeugen bestimmen?
Tipp 22	Der Stau beginnt, wenn in der Zeiteinheit mehr Fahrzeuge ankommen als abgefertigt werden können.

2

Tipp 23	Der Stau baut sich erst wieder ab, wenn die momentane Ankunftsrate unter die Abfertigungsrate gefallen ist. Bestimmen Sie zuerst den Zeitpunkt t_2, bei dem dies eintritt.
Tipp 24	Wie viele Fahrzeuge stehen nach 12 Stunden im Stau?
Tipp 25	Beachten Sie, dass der Parameter a eine Konstante ist.
Tipp 26	Der Extrempunkt E aus Teilaufgabe a liegt auf der y-Achse. Beachten Sie, dass sich seine y-Koordinate durch eine quadratische Funktion mit der Variablen a beschreiben lässt.
Tipp 27	Bestimmen Sie einen Normalenvektor von E.
Tipp 28	Machen Sie eine Skizze der Pyramide und entscheiden Sie, ob der gesuchte Winkel spitz oder stumpf ist.
Tipp 29	Welches spezielle Dreieck liegt hier vor?
Tipp 30	Zeichnen Sie den Quader in die Skizze der Pyramide ein.
Tipp 31	Betrachten Sie den Quadereckpunkt U, der auf der Pyramidenkante BS liegt.
Tipp 32	Da hier mit Zurücklegen gezogen wird, liegt eine Bernoulli-Kette vor.
Tipp 33	Da die beiden schwarzen Kugeln direkt hintereinander auftreten sollen, kann man hier die Formel von Bernoulli nicht verwenden.
Tipp 34	Wie viele schwarze Kugeln können sich nach dem Ziehen aus Gefäß G1 im Gefäß G2 befinden?
Tipp 35	Bestimmen Sie einen Normalenvektor von E.
Tipp 36	Wie lauten die Koordinaten des oberen Stabendes G?
Tipp 37	Da der gesuchte Winkel spitz ist, ist er gleich groß wie der Schnittwinkel der Geraden g, in der der Stab liegt, und der Ebene E.
Tipp 38	Bestimmen Sie eine Gleichung der „Lichtgeraden" durch L und das obere Ende G des Stabes.
Tipp 39	Beachten Sie, dass nicht jeder Punkt der Ebene E auch auf der Platte liegt. Welche Bedingungen gelten für die Koordinaten aller Punkte, die auf der Platte liegen?
Tipp 40	Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene F, auf der die Kreisbahn liegt.
Tipp 41	Es liegt eine Binomialverteilung vor.
Tipp 42	Der Erwartungswert einer Binomialverteilung lässt sich sehr einfach berechnen.
Tipp 43	Es handelt sich hier um einen rechtsseitigen Signifikanztest.

Folgende Tipps geben eine weitere Hilfestellung:

Tipp 1	Beachten Sie bei der Anwendung der Produktregel auch die Kettenregel. Sie wissen: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
Tipp 2	Denken Sie an die „Umkehrung der Kettenregel". Machen Sie vorsorglich immer eine Probe durch Ableiten der ermittelten Stammfunktion, ehe Sie das Integral berechnen.
Tipp 3	Nehmen Sie die Substitution $x^2 = u$ vor und lösen Sie die entstehende quadratische Gleichung.
Tipp 4	Welche Wirkung hat der Faktor 2 vor dem Kosinusterm? Welche Wirkung hat der Summand -2 nach dem Kosinusterm?
Tipp 5	$\frac{\pi}{2} \cdot x$ muss 0 sein. Denken Sie an die Periodizität der Kosinusfunktion und das angegebene Definitions-Intervall.
Tipp 6	Sie müssen nacheinander an beiden Graphen Funktionswerte ablesen. Beginnen Sie mit $g(3)$. Bestimmen Sie eine der beiden Nullstellen von f.
Tipp 7	Verwenden Sie die Produktregel. An den Graphen können Sie die Funktionswerte von f und g sowie die von f' und g' ablesen.
Tipp 8	Zur Bestimmung der Spurpunkte verwenden Sie die Achsenabschnittsform der Ebenengleichung. Durch welche Punkte geht die Schnittgerade der Ebenen?
Tipp 9	Der Normalenvektor von G muss auch orthogonal zur Geraden durch die Spurpunkte $F_2(0\|4\|0)$ und $F_3(0\|0\|2)$ sein. Verwenden Sie als Koordinatenform der Gleichung von Ebene G die Achsenabschnittsform.
Tipp 10	C liegt auf der zu g orthogonalen Hilfsebene. Als Normalenvektor der Hilfsebene können Sie den Richtungsvektor der Geraden verwenden.
Tipp 11	Der Summand $\binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ erinnert an die Formel von Bernoulli. Schreiben Sie die beiden anderen Summanden analog auf.
Tipp 12	Verwenden Sie die Formel von Bernoulli.
Tipp 13	Die Gerade durch den Kugelmittelpunkt und den Berührpunkt ist orthogonal zur Berührebene (Tangentialebene).
Tipp 14	Den Extrempunkt können Sie dem Graphen entnehmen. Die Wendestelle x_1 ist eine Extremstelle des Graphen der Ableitungsfunktion. Beachten Sie: Die y-Koordinate des Wendepunkts ist nicht die y-Koordinate des Extrempunkts des Graphen der Ableitungsfunktion. Vermuten Sie die Gleichung der Asymptoten anhand des Graphen.
Tipp 15	Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = 8$ (GTR).
Tipp 16	Die Bedingung lautet $u = f(u)$. Lösen Sie diese Gleichung (GTR).
Tipp 17	Setzen Sie die Gleichung zur Berechnung des Mittelwerts mit der Variablen a an und lösen Sie diese (GTR).

2

Tipp 18	Geben Sie den Abstand der beiden Extrempunkte $E_1\left(-t\,\middle|\,\frac{2}{3}t^3\right)$; $E_2\left(t\,\middle|\,-\frac{2}{3}t^3\right)$ in Abhängigkeit von t an (Pythagoras) und lösen Sie die entstehende Gleichung (GTR).
Tipp 19	Im Zeichenfenster sollten y-Werte bis etwa 500 zu sehen sein.
Tipp 20	Die Koordinaten des Extrempunkts können Sie dem Graphen entnehmen.
Tipp 21	Mithilfe eines Integrals können Sie die Gesamtzahl der ankommenden Fahrzeuge berechnen.
Tipp 22	Die Ankunftsrate ist durch f(t) beschrieben, die Abfertigungsrate beträgt 110 Fahrzeuge je Stunde.
Tipp 23	Mithilfe eines Integrals kann man die Gesamtzahl der im Stau stehenden Fahrzeuge berechnen.
Tipp 24	Berechnen Sie zunächst den Zeitpunkt t_4, zu dem die momentane Ankunftsrate unter die neue Abfertigungsrate 220 Fahrzeuge je Stunden fällt.
Tipp 25	Es reicht die notwendige Bedingung zur Berechnung des Extrempunkts.
Tipp 26	Zeichnen Sie den Graphen dieser quadratischen Funktion mit dem GTR. In welchem Bereich liegen die Funktionswerte?
Tipp 27	Der Normalenvektor von E muss auf den Vektoren $\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.
Tipp 28	Der gesuchte Winkel ist spitz und daher genauso groß wie der Winkel zwischen der Ebene E und der Ebene $x_3 = 0$.
Tipp 29	Das Dreieck BCS ist gleichschenklig. Die Basis BC hat den Mittelpunkt M. Die Strecke MS ist eine Höhe des Dreiecks.
Tipp 30	Der Quader hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge 5 Längeneinheiten. Der Mittelpunkt R der Kante BS ist ebenfalls ein Eckpunkt des Quaders.
Tipp 31	Die Pyramidenkante BS liegt auf der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.
Tipp 32	Sie können $P(X \geqq 12)$ nicht direkt berechnen. Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe des Gegenereignisses.
Tipp 33	Wie viele Pfade gibt es, bei denen die beiden schwarzen Kugeln direkt hintereinander auftreten?
Tipp 34	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man keine, eine bzw. zwei schwarze Kugeln aus dem Gefäß G1 zieht. Beachten Sie dabei, dass man ohne Zurücklegen zieht.
Tipp 35	Der Normalenvektor von E muss auf den Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.
Tipp 36	Das obere Stabende ist $G(5\,\vert\,6\,\vert\,2)$.
Tipp 37	Ein Normalenvektor von E ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ein Richtungsvektor von g ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tipp 38	Gleichung der „Lichtgeraden“ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Schneiden Sie g mit E.
Tipp 39	Für die x_1-Koordinaten aller Punkte, die auf der Platte liegen, gilt $0 \leqq x_1 \leqq 10$. In welchen Intervallen müssen die anderen beiden Koordinaten liegen?
Tipp 40	Eine Ebenengleichung von F lautet $x_3 = 2$. Die Kollisionspunkte liegen auf F und müssen von G den Abstand 5 Längeneinheiten haben.
Tipp 41	Mithilfe des GTR können Sie die kumulierten Binomialverteilungen berechnen.
Tipp 42	Für den Erwartungswert einer Binomialverteilung gilt: $E(X) = n \cdot p$ Bestimmen Sie das Intervall, in dem X liegen muss.
Tipp 43	Im Extremfall liegt eine $B_{800;0{,}02}$-Verteilung vor. Welche Ungleichung ergibt sich mithilfe des Signifikanzniveaus von 5 %?

Folgende Tipps helfen, Lücken zu schließen:

Tipp 1	Bearbeiten Sie aus F 15 die Beispiele b) und d) und die Aufgabe d), aus F 16 das Beispiel c) und die Aufgaben b) und c), aus F 17 das Beispiel a) und die Aufgabe e).
Tipp 2	Bearbeiten Sie aus F 41 das Beispiel 3 und die Aufgabe 1 d), aus F 43 das Beispiel 3 c) und die Aufgaben 1 a) und 2 f).
Tipp 3	Denken Sie an die Resubstitution. Bearbeiten Sie aus F 2 das Beispiel f) und die Aufgabe f).
Tipp 4	Bearbeiten Sie aus F 73 die Beispiele 1 bis 4 und die Aufgaben 1, 3 und 4, aus F 74 Beispiel 1 b), Beispiel 3 und die Aufgaben a) und d).
Tipp 5	Die Kosinusfunktion ist periodisch mit der Periode 2π. Bearbeiten Sie aus F 5 die Beispiele 1 und 2 sowie die Aufgaben a) und b).
Tipp 6	Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle g(3). Die gefundene Nullstelle heiße u_1. Für welchen Wert x_1 nimmt g diesen Wert an?
Tipp 7	Die Ableitungen an der Stelle 2 erhalten Sie als Steigungen der Tangenten an die Graphen.
Tipp 8	Bearbeiten Sie aus F 126 die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben 1 und 2, aus F 121 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 9	Vergleichen Sie die Koeffizienten in der Achsenabschnittsform mit den Koordinaten der gegebenen Spurpunkte. Bearbeiten Sie aus F 126 das Beispiel 1 und die Aufgabe 2.
Tipp 10	Bearbeiten Sie aus F 163 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 11	Es gilt: $P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$ Identifizieren Sie n, p und k und beachten Sie, dass es sich um die Summe von drei Einzelwahrscheinlichkeiten handelt.
Tipp 12	Bearbeiten Sie aus F 231 das Beispiel 1. Beachten Sie dabei die Definition der Binomialkoeffizienten.

Tipp 13 Den Berührpunkt erhalten Sie als Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Tangentialebene. Der Abstand des Berührpunkts vom Kugelmittelpunkt ist der Radius. Lesen Sie den einleitenden Text aus **F 110** und bearbeiten Sie das Beispiel 1.

Tipp 14 Beachten Sie: Die y-Koordinate des Wendepunkts ist $f(x_1)$.

Tipp 15 (CASIO) Verwenden Sie im RUN-Menü den Befehl SolvN, um die Gleichung zu lösen.
(TI) Bestimmen Sie die Schnittstellen des Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x \cdot f(x)$ und der Geraden mit der Gleichung $y = 8$.

Tipp 16 (CASIO) Verwenden Sie im RUN-Menü den Befehl SolvN, um die Gleichung zu lösen.
(TI) Bestimmen Sie die Schnittstelle des Graphen der Funktion f und der Geraden mit der Gleichung $y = x$.

Tipp 17 Bearbeiten Sie aus **F 58** Beispiel 3 sowie die Aufgabe 4.
(CASIO) Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{3} \cdot \int_u^{u+3} f(x)\,dx = 2{,}2$ im RUN-Menü mithilfe des Befehls SolvN. Beachten Sie dabei, dass u als Variable definiert werden muss.
(TI) Bestimmen Sie die Schnittstelle des Graphen der Funktion g mit
$g(x) = \frac{1}{3} \cdot \int_x^{x+3} f(x)\,dx$ und der Geraden mit der Gleichung $y = 2{,}2$.

Tipp 18 Für den Abstand der beiden Extrempunkte in Abhängigkeit von t gilt:
$d(t) = \sqrt{4t^2 + \frac{16}{9}t^6}$

Tipp 19 Wählen Sie folgende Fenstereinstellung: $-2 \leqq x \leqq 32$; $-50 \leqq y \leqq 500$

Tipp 20 Beachten Sie, dass sich die Extremstelle des Graphen von f im gewählten Zeichenfenster befinden muss.

Tipp 21 Bearbeiten Sie aus **F 82** das Beispiel und die Aufgabe.
Beachten Sie: Anfangs stehen keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang im Stau.

Tipp 22 Lösen Sie die Gleichung $f(t) = 110$ (GTR).

Tipp 23 Berechnen Sie $G = \int_{2{,}54}^{t_2} (f(t) - 110)\,dt$.

Tipp 24 Die Anzahl der Fahrzeuge im Stau nach 12 Stunden kann durch $\int_{2{,}54}^{12} (f(t) - 110)\,dt$, die Anzahl der Fahrzeuge, die nach 12 Stunden ankommen, durch $\int_{12}^{15{,}90} (f(t) - 220)\,dt$ beschrieben werden.

Tipp 25 Bearbeiten Sie aus **F 91** Beispiel 2 und aus **F 29** Beispiel c) sowie die Aufgabe c).

Tipp 26 Der Graph dieser quadratischen Funktion hat den Hochpunkt $H\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{4}\right)$.
Welche Bedeutung hat die y-Koordinate dieses Hochpunkts im Hinblick auf die Fragestellung?

Tipp 27 Bearbeiten Sie aus **F 125** das Beispiel 1 oder 2 und Aufgabe 1, 2, oder 3.

Tipp 28 Bearbeiten Sie aus **F 155** das Beispiel c) und die Aufgabe c).
Bearbeiten Sie aus **F 153 a** das Beispiel und die Aufgabe 1.

Tipp 29	Für den Flächeninhalt gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot \lvert\overrightarrow{MS}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$. Bearbeiten Sie aus **F 102** das Beispiel und die Aufgabe. Bearbeiten Sie aus **F 105** das Beispiel 2 und die Aufgabe. Alternative: Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC}$ entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $\overrightarrow{SB}$ und $\overrightarrow{SC}$ aufgespannt wird. Der Flächeninhalt des Dreiecks BCS ist halb so groß wie der dieses Parallelogramms.
Tipp 30	Bearbeiten Sie aus **F 105** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgabe. Die x_3-Koordinate von R ist die Höhe des Quaders.
Tipp 31	Beachten Sie: u_3 muss doppelt so groß wie u_1 oder u_2 sein.
Tipp 32	Bearbeiten Sie aus **F 231** das Beispiel 3 und Aufgabe 1 c).
Tipp 33	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad, bei dem zwei schwarze Kugeln direkt hintereinander auftreten. Multiplizieren Sie anschließend diese Wahrscheinlichkeit mit der Anzahl der günstigen Pfade.
Tipp 34	Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm für dieses zweistufige Zufallsexperiment. Berechnen Sie anschließend mithilfe der Pfadregeln die gesuchte Wahrscheinlichkeit.
Tipp 35	Bearbeiten Sie aus **F 125** das Beispiel 2 und Aufgabe 1, 2 oder 3.
Tipp 36	Bearbeiten Sie aus **F 126** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2.
Tipp 37	Bearbeiten Sie aus **F 154** das Beispiel 1 oder 2 und die Aufgabe 1 oder 2.
Tipp 38	Bearbeiten Sie aus **F 141 a** das Beispiel 2.
Tipp 39	Für die x_2-Koordinaten aller Punkte, die auf der Platte liegen, gilt: $0 \leqq x_2 \leqq 6$ In welchem Intervall muss die x_3-Koordinate liegen?
Tipp 40	Da die Kollisionspunkte in F und in E liegen müssen, liegen sie auf der Schnittgeraden g von E und F. Bearbeiten Sie aus **F 134 c** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgabe 3. Gesucht sind also zwei Punkte von g, die von G den Abstand 5 Längeneinheiten haben. Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{(t-5)^2 + (6-2)^2 + (2-2)^2} = 5$ mit dem GTR.
Tipp 41	Bearbeiten Sie aus **F 231** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1 b).
Tipp 42	Bearbeiten Sie aus **F 231** das Beispiel 4 und die Aufgabe 1 f).
Tipp 43	Bearbeiten Sie aus **F 242** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 a).

Lösungen

Pflichtteil

Aufgabe 1

Mit Produktregel, Potenzregel und Kettenregel folgt aus $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{2x}$: F 15 F 16 F 17

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} + x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} \cdot 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{2x} + 2\sqrt{x} \cdot e^{2x}$$

Aufgabe 2

F 41 F 43

$$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\,dx = \int_0^1 4 \cdot (2x+1)^{-3}\,dx = \left[4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{-2}\right) \cdot (2x+1)^{-2}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3^2} - \left(-\frac{1}{1^2}\right) = -\frac{1}{9} + 1 = \frac{8}{9}$$

Das Integral hat den Wert $\frac{8}{9}$.

Aufgabe 3

F 2

$$x^4 = 4 + 3x^2$$
$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Substitution: $x^2 = u$

$u^2 - 3u - 4 = 0$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

$$u_{1;2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$u_1 = 4$; $u_2 = -1$

Resubstitution:

$x^2 = 4$; $x^2 = -1$

$x_1 = -2$; $x_2 = 2$ Diese Gleichung hat keine reelle Lösung.

Die gegebene Gleichung hat die beiden Lösungen −2 und 2.

Aufgabe 4

F 73 F 74

a) Es gilt: $f(x) = \cos(x)$; $g(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - 2$

Der Graph von $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ entsteht aus dem Graphen von f durch eine Streckung mit dem Streckfaktor $\frac{2}{\pi}$ $\left(\text{Stauchung mit dem Faktor } \frac{\pi}{2}\right)$ in x-Richtung.

Der Graph von $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ entsteht aus dem Graphen von $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ durch eine Streckung mit dem Streckfaktor 2 in y-Richtung.

Der Graph von $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - 2$ entsteht aus dem Graphen von $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ durch Verschiebung um 2 Einheiten in y-Richtung nach unten.

Der Graph von g entsteht also folgendermaßen:

Der Graph von f wird mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ in x-Richtung und mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und anschließend um 2 Einheiten in y-Richtung nach unten verschoben.

Hinweis: Die Streckung in y-Richtung muss vor der Verschiebung erfolgen.

F 5

b) Nullstellen von g für $0 \leqq x \leqq 4$:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - 2 = 0$$
$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 2$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 1$$
$$\frac{\pi}{2} \cdot x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2} \cdot x = 2\pi$$
$$x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 4$$

Die Lösung $x_2 = 4$ ergibt sich wegen der Periode 2π der Kosinusfunktion.
Im gegebenen Intervall $[0;4]$ kommen also nur $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ in Frage.

Die einzigen Nullstellen von g sind 0 und 4.

Aufgabe 5

a) Ablesung an den Graphen ergibt: $g(3) = -1$, $f(g(3)) = f(-1) = 5$

Man erkennt: $f(4) = 0$ und $4 = g(-2)$. Folglich gilt: $f(g(-2)) = 0$

Hinweis: Eine zweite Lösung ergibt sich durch $f(0) = 0$ und $0 = g(2)$.
Daher gilt auch: $f(g(2)) = 0$

F 15

b) Mit der Produktregel und Ablesen der entsprechenden Werte an den Graphen erhält man:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$$
$$h'(2) = 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1)$$
$$h'(2) = 4$$

Aufgabe 6

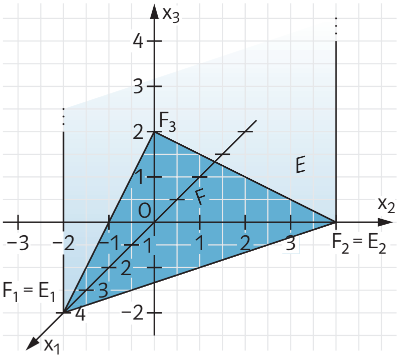
F 126

a) Darstellung der Ebenen in Achsenabschnittsform:

$$E: \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} = 1; \quad F: \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1$$

Spurpunkte der Ebene E:
$E_1(4|0|0)$, $E_2(0|4|0)$ (E_3 existiert nicht, da die Ebene E parallel zur x_3-Achse ist.)
Spurpunkte der Ebene F:
$F_1(4|0|0)$, $F_2(0|4|0)$, $F_3(0|0|2)$

Darstellung der Ebenen im Koordinatensystem:



Gleichung der Schnittgeraden g von E und F:
Die Schnittgerade g der beiden Ebenen enthält die Punkte E_1 und E_2.
Eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F lautet daher: F 121 F 134 c

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Gleichung der Ebene G:
Da G parallel zur x_1-Achse und die Gerade durch F_2 und F_3 Spurgerade mit der x_2x_3-Ebene sein soll, ergibt sich als Ebenengleichung in Achsenabschnittsform: F 125

$G:\ \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1$ (oder äquivalente Darstellung wie z.B. $x_2 + 2x_3 = 4$)

Aufgabe 7

Gleichung der Geraden g durch die Punkte $A(1\,|\,10\,|\,1)$ und $B(-3\,|\,13\,|\,1)$: F 121

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abstand des Punktes $C(2\,|\,3\,|\,1)$ von g:

1. Lösungsweg:
H sei eine Hilfsebene durch C und orthogonal zur Geraden g. Der Richtungsvektor von g kann als Normalenvektor von H verwendet werden. Die Gleichung von H in Koordinatenform lautet: F 163 F 133 a

$H:\ -4x_1 + 3x_2 = d$

Punktprobe mit C liefert:

$$\begin{aligned} -4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 &= d \\ d &= 1 \end{aligned}$$

$H:\ -4x_1 + 3x_2 = 1$

Der Schnittpunkt der Geraden g mit dieser Hilfsebene H ist der Lotfußpunkt des Lotes von C auf g. Man erhält mit der Gleichung von g: F 161

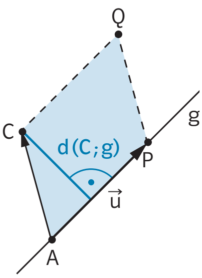
$$\begin{aligned} -4 \cdot (1 - 4s) + 3 \cdot (10 + 3s) &= 1 \\ -4 + 16s + 30 + 9s &= 1 \\ 25s &= -25 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Mit diesem Parameterwert erhält man den Lotfußpunkt S(5|7|1) des Lotes von C auf g und damit den gesuchten Abstand:

$$d(C;g) = |\overrightarrow{CS}| = \left|\begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5$$

Der Punkt C hat von Gerade g den Abstand 5 Längeneinheiten.

2. Lösungsweg:
Den Flächeninhalt A des Parallelogramms APQC kann man einerseits mit $|\vec{u}| \cdot d(C;g)$ berechnen, andererseits mithilfe des Kreuzprodukts $|\vec{u} \times \overrightarrow{AC}|$. Daraus folgt $d(C;g) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AC}|}{|\vec{u}|}$.



Mit $|\vec{u}| = \left|\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5$;

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\10\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-7\\0\end{pmatrix}$ und $|\vec{u} \times \overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-7\\0\end{pmatrix}\right| = 25$

erhält man $d(C;g) = 5$.

Aufgabe 8

a) Mit $10 = \binom{10}{9}$; $1 = \binom{10}{10}$ und $1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$ erhält man den umgeschriebenen Term:

$$P(A) = \binom{10}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{10}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{10}{10}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

Man erkennt, dass 10 Spiele gespielt werden, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ verloren werden. Der erste Summand gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass acht Spiele verloren werden, der zweite Summand die Wahrscheinlichkeit dafür, dass neun Spiele verloren werden und der dritte Summand die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle zehn Spiele verloren werden. F 231

Ereignis A: Von zehn Spielen verliert man mindestens acht Spiele.

b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der verlorenen Spiele bei vier Spielen. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Spiel zu verlieren, beträgt $\frac{2}{3}$. Es liegt eine Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = \frac{2}{3}$ vor. F 231

Es gilt: $P(X=2) = \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{8}{27}$

Der Spieler verliert mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{27}$ zwei der vier Spiele.

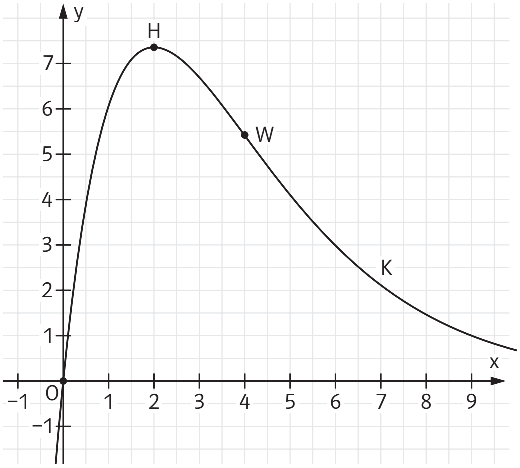
Aufgabe 9

Man bestimmt die Gleichung der Lotgeraden g, die durch den Kugelmittelpunkt M geht und orthogonal zur Ebene E ist. Dabei kann man den Ortsvektor von M als Stützvektor und einen Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor der Geraden verwenden. F 110 F 161
Der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E ist der Berührpunkt B der Kugel und der Ebene.
Die Länge der Strecke MB ist der Kugelradius.

Wahlteil

Aufgabe A 1.1

a) Skizze des Graphen K unter Verwendung des GTR:



Die Wendestelle erhält man mit dem GTR als Extremstelle der Ableitungsfunktion f', die y-Koordinate des Wendepunkts durch Einsetzen der Wendestelle in die Gleichung von f.

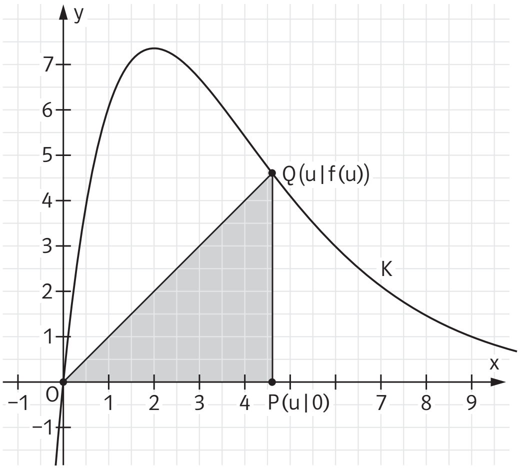
Hochpunkt $H^*(2{,}00 \mid 7{,}36)$, Wendepunkt $W^*(4{,}00 \mid 5{,}41)$
Gleichung der Asymptote: $y = 0$

F 75

b) Für die Maßzahl A(u) des Flächeninhalts des Dreiecks OPQ gilt:
$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$
Bedingung: $8 = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$.

Die Gleichung löst man mit dem GTR.
Man erhält: $u_1 = 2{,}183\ldots$

Das Dreieck OPQ hat für $u_1 \approx 2{,}18$ den Flächeninhalt 8 Flächeneinheiten.



Anmerkung: Der GTR liefert noch einen zweiten Näherungswert $u_2 \approx 6{,}62$, der ebenfalls zu einem Dreieck mit dem Flächeninhalt 8 Flächeneinheiten führt.

Da die Seite OQ Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks OPQ ist, kann dieses Dreieck nur gleichschenklig sein, wenn OP und PQ gleich lang sind.
Die Bedingung dafür lautet: $u = f(u)$.
Mit dem GTR erhält man: $u_3 = 4{,}605\ldots$

Das Dreieck OPQ ist für $u \approx 4{,}61$ gleichschenklig.

F 58

c) Die linke Grenze des gesuchten Intervalls heiße a.
Mit der gegebenen Funktion f, dem Mittelwert $m = 2{,}2$ und der Intervalllänge $b - a = 3$ ergibt sich aus $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ die Bedingung:

$$2{,}2 = \frac{1}{3} \cdot \int_a^{a+3} 10x \cdot e^{-0{,}5x}\,dx$$

Mit dem GTR erhält man $a = 5{,}497\ldots$.

Das Intervall der Länge 3 Längeneinheiten ist näherungsweise [5,5 ; 8,5].

Bemerkung: Eine zweite Näherungslösung ist das Intervall [−0,9 ; 2,1].

Aufgabe A 1.2

F 91

Bestimmung der Koordinaten der beiden Extrempunkte:

F 29

Ableitung: $f_t'(x) = x^2 - t^2;\ t > 0$

F 2

Notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

$$x^2 - t^2 = 0$$

$$x_1 = t,\ x_2 = -t$$

Die Extremstellen sind also $x_1 = t$ und $x_2 = -t$.
Damit ergibt sich:

$$f_t(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 \cdot t = -\frac{2}{3}t^3; \quad f_t(-t) = \frac{1}{3}(-t)^3 - t^2 \cdot (-t) = \frac{2}{3}t^3$$

Die Extrempunkte sind $E_1\left(t \,\middle|\, -\frac{2}{3}t^3\right)$ und $E_2\left(-t \,\middle|\, \frac{2}{3}t^3\right)$.

F 33

Abstand d der beiden Extrempunkte:

$$d(t) = \sqrt{(t-(-t))^2 + \left(-\frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3}t^3\right)^2} = \sqrt{4t^2 + \frac{16}{9}t^6}$$

Bedingung: $d(t) = 13;\ t > 0$

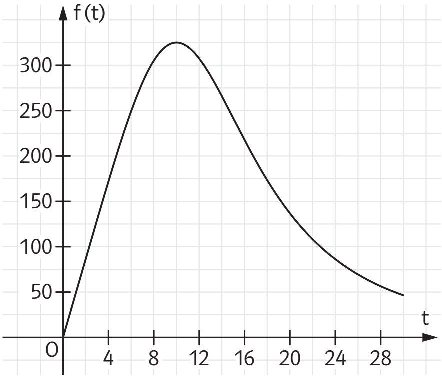
Mit dem GTR ergibt sich $t_1 = 2{,}097\ldots$

Die beiden Extrempunkte haben für $t \approx 2{,}10$ den Abstand 13 Längeneinheiten.

Hinweis:
Wegen der Symmetrie des Graphen zum Koordinatenursprung O reicht es auch aus, die Bedingung $d^*(O; E_1) = d^*(t) = \sqrt{t^2 + \frac{4}{9}t^6} = 6{,}5$ anzusetzen.

Aufgabe A 2.1

a) Skizze des Graphen von f:



Zeitpunkt der maximalen Ankunftsrate:
Mit dem GTR bestimmt man den Hochpunkt H(10 | 325) des Graphen.

Die Ankunftsrate ist 10 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.

Anzahl der in den ersten 6 Stunden angekommenen Fahrzeuge:

$$\int_0^6 f(t)\,dt = \int_0^6 \frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000}\,dt$$

Der GTR ergibt 769,050...

In den ersten 6 Stunden sind etwa 770 Fahrzeuge angekommen.

F 82

b) Zeitpunkt des Staubeginns:
Der Stau beginnt, wenn die Ankunftsrate größer als die Abfertigungsrate ist. Dieser Zeitpunkt lässt sich mit der Bedingung $f(t) = 110$ ermitteln.
Der GTR liefert: $t_1 = 2{,}541\ldots$

Der Stau beginnt nach etwa 2,5 Stunden.

Maximale Anzahl der Fahrzeuge im Stau:
Die Zahl der im Stau stehenden Fahrzeuge nimmt ab, wenn die momentane Ankunftsrate wieder unter 110 sinkt. Diesen Zeitpunkt kann man mit der Bedingung $f(t) = 110$ und $t > t_1$ ermitteln.
Mit dem GTR ergibt sich $t_2 = 21{,}859\ldots$
Die Differenz $f(t) - 110$ aus Ankunftsrate und Abfertigungsrate beschreibt den momentanen Zuwachs der Fahrzeuganzahl im Stau. Die Gesamtzahl G der im Stau stehenden Fahrzeuge erhält man daher durch:

$$G = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - 110)\,dt = \int_{2{,}54}^{21{,}86} \left(\frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000} - 110\right) dt$$

Der GTR liefert $G = 2324{,}968\ldots$

Vor dem Grenzübergang stehen maximal etwa 2320 Fahrzeuge im Stau.

Maximale Anzahl der Fahrzeuge bei Erhöhung der Abfertigungsrate:
Die Staulänge setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: der Staulänge vom Zeitpunkt $t_1 = 2{,}541\ldots$ bis zum Zeitpunkt $t_3 = 12$ bei einer Abfertigungsrate von 110 Fahrzeugen je Stunde und der Staulänge vom Zeitpunkt $t_3 = 12$ bis zum Zeitpunkt t_4 bei einer Abfertigungsrate von 220 Fahrzeugen je Stunde.
Der Zeitpunkt t_4 ist erreicht, wenn die Ankunftsrate wieder unter 220 Fahrzeuge je Stunde fällt.
Bedingung für t_4: $f(t) = 220$ und $t > t_3$
Mit dem GTR erhält man $t_4 = 15{,}904\ldots$

Damit gilt für die maximale Staulänge:

$$G = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - 110)\,dt + \int_{t_3}^{t_4} (f(t) - 220)\,dt$$

$$= \int_{2{,}54}^{12} \left(\frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000} - 110\right) dt + \int_{12}^{15{,}90} \left(\frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000} - 220\right) dt$$

Der GTR liefert den Wert 1602,350…

Bei einer Erhöhung der Abfertigungsrate würde die Staulänge höchstens etwa 1600 Fahrzeuge betragen.

Aufgabe A 2.2

a) Bestimmung des Extrempunkts: F 91 F 5

Ableitungen:

$f_a'(x) = a \cdot (-\sin(x)) = -a \cdot \sin(x)$; $f_a''(x) = -a \cdot \cos(x)$; $-\pi < x < \pi$, $a > 0$

Notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$

$$-a \cdot \sin(x) = 0$$
$$\sin(x) = 0$$
$$x_1 = 0$$

Aus $f_a''(0) = -a \cdot \cos(0) = -a$ und $a > 0$ folgt, dass $x_1 = 0$ eine Maximumstelle ist.

Es gilt: $f_a(0) = a \cdot \cos(0) - a^2 = a - a^2$

Der Graph G_a von f_a hat den Hochpunkt $H_a(0\,|\,a - a^2)$.

Hinweis: Die Aufgabenstellung verlangt nicht den Nachweis, dass es sich um einen Extrempunkt handelt.

Alternative Lösung:

Der Graph G_a entsteht aus dem Graphen G mit $g(x) = \cos(x)$ durch Streckung mit dem Streckfaktor a in y-Richtung und anschließender Verschiebung um a^2 nach unten. Der Extrempunkt von G_a hat daher dieselbe x-Koordinate wie der Extrempunkt von G.

Der Graph G hat im Intervall $]-\pi\,;\pi[$ nur den Hochpunkt $H(0\,|\,1)$ als Extrempunkt. Der Hochpunkt des gestreckten und verschobenen Graphen ist dann $H_a(0\,|\,f_a(0) = a - a^2)$.

b) Mögliche Schnittpunkte des Graphen G_a und der y-Achse: F 91

Aus Teilaufgabe a) ist bekannt, dass die y-Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit der y-Achse die Funktionswerte der Funktion h mit $h(a) = a - a^2$, $a > 0$, sind.

Der Hochpunkt des Graphen der Funktion h kann mit dem GTR bestimmt werden. Man erhält $\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{4}\right)$. Da der Graph von h eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Hochpunkt als Scheitel ist, folgt $h(a) \leq \frac{1}{4}$.

Daher kann kein Graph G_a durch einen Punkt der y-Achse gehen, der eine größere y-Koordinate als $\frac{1}{4}$ hat.

Aufgabe B 1.1

a) Koordinatengleichung der Ebene E:

1. Lösungsweg:
Die Vektoren $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-5\\12\end{pmatrix}$ können als Spannvektoren der Ebene BCS gewählt werden. Ein Normalenvektor dieser Ebene lässt sich mithilfe des Kreuzprodukts berechnen. Es gilt:

$$\vec{n} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}-10\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\-5\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\120\\50\end{pmatrix}$$ F 109

Ein Normalenvektor mit kleineren Koordinaten ist $\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}$.

Eine Ebenengleichung in Koordinatenform ist demnach $12x_2 + 5x_3 = d$ mit noch unbekanntem d. Die Punktprobe mit dem Punkt $S(0\,|\,0\,|\,12)$ ergibt $d = 60$.

Eine Koordinatengleichung von E lautet $12x_2 + 5x_3 = 60$.

2. Lösungsweg:
Eine Koordinatengleichung von E hat die allgemeine Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. F 125 F 9
Die drei Punkte B, C und S liegen auf E. Daher macht man drei Punktproben.
Für Punkt $B(5\,|\,5\,|\,0)$ folgt: $a \cdot 5 + b \cdot 5 + c \cdot 0 = d$ (I)
Für Punkt $C(-5\,|\,5\,|\,0)$ folgt: $a \cdot (-5) + b \cdot 5 + c \cdot 0 = d$ (II)
Für Punkt $S(0\,|\,0\,|\,12)$ folgt: $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 12 = d$ (III)
Das vereinfachte Gleichungssystem heißt jetzt:
(I) $5a + 5b = d$
(II) $-5a + 5b = d$
(III) $12c = d$
Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten ergibt $a = 0$ und damit:
(II a) $5b = d$
(III) $12c = d$
Nun ist d beliebig wählbar. Zweckmäßigerweise wählt man ein gemeinsames Vielfaches von 5 und 12, um Bruchzahlen zu vermeiden. Ein gemeinsames Vielfaches ist 60.
Mit $d = 60$ erhält man $b = 12$ und $c = 5$.

Eine Koordinatengleichung von E lautet $12x_2 + 5x_3 = 60$.
Winkel zwischen der Seitenfläche BCS und der Grundfläche ABCD:
Die Grundfläche der Pyramide liegt in der x_1x_2-Ebene, da die x_3-Koordinate der Punkte A, B, C und D den Wert 0 hat. Die Spitze S liegt auf der x_3-Achse. Daher bilden die Seitenflächen und insbesondere die Fläche BCS mit der Grundfläche einen spitzen Winkel. F 155 F 153 a

Ein Normalenvektor der Ebene E ist $\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}$, ein Normalenvektor der Grundfläche (x_1x_2-Ebene) ist $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

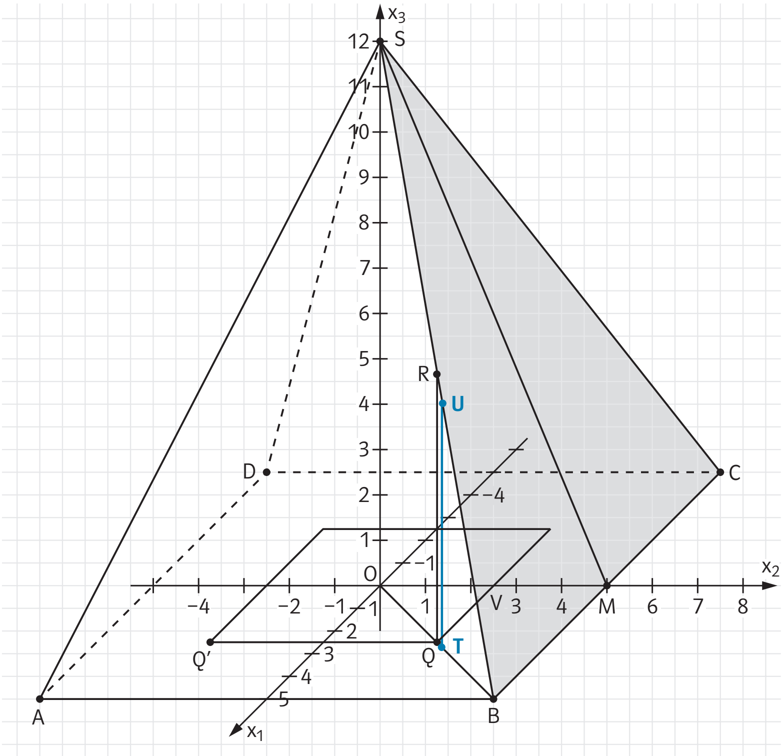
Für die Weite α des Winkels zwischen den beiden Normalenvektoren gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 5 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{5}{13}$$ F 151

Damit erhält man $\alpha \approx 67{,}4°$. Da der zu bestimmende Winkel der Abbildung nach ein spitzer Winkel sein muss, ist dies bereits die zutreffende Winkelweite.

Der Winkel zwischen der Seitenfläche BCS und der Grundfläche ABCD hat näherungsweise die Weite 67,4°.

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Sachverhalte für alle Teilaufgaben.



Flächeninhalt des Dreiecks BCS:
Wegen der bezüglich der x_2x_3-Ebene symmetrischen Lage der Punkte B und C ist das Dreieck BCS gleichschenklig mit $\overline{BS} = \overline{CS}$. Da $M(0|5|0)$ der Mittelpunkt der Grundseite BC ist, ist MS die Dreieckshöhe.
Die Grundseite BC hat die Länge 10 Längeneinheiten.
Für die Länge h der Höhe MS gilt:

$$h = \left|\overrightarrow{MS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 12^2} = 13$$

Für die Maßzahl A des Flächeninhalts ergibt sich:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65$$

Das Dreieck BCS hat den Flächeninhalt 65 Flächeneinheiten.

F 105
F 102
F 101

b) Quadervolumen:
Sowohl die Pyramide als auch der einbeschriebene Quader liegen symmetrisch zur x_1x_3-Ebene. Der Bildpunkt $Q'(2{,}5\,|\,-2{,}5\,|\,0)$ des Punktes Q bei Spiegelung an der x_1x_3-Ebene ist ebenfalls ein Eckpunkt des Quaders. Die Kante QQ' hat somit die Länge 5 Längeneinheiten.

F 121
F 122

Der gesuchte Eckpunkt R liegt senkrecht über dem Punkt Q und auf der Pyramidenkante BS. Die Gerade (BS) hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Punktprobe für $R(2{,}5\,|\,2{,}5\,|\,h)$:
(I) $2{,}5 = 5 - 5u$
(II) $2{,}5 = 5 - 5u$
(III) $h = 0 + 12u$
Aus (I) oder (II) folgt $u = \frac{1}{2}$. Mit (III) ergibt sich $h = 6$ und damit $R(2{,}5\,|\,2{,}5\,|\,6)$.
Für das Volumen folgt die Maßzahl $V = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$.

Der Quader hat das Volumen 150 Volumeneinheiten.

Alternative Lösung:
Der Punkt Q liegt auf der Diagonalen BD des Quadrats ABCD. Er ist der Mittelpunkt der Strecke OB. Aus Symmetriegründen verlaufen die Grundkanten des Quaders in der x_1x_2-Ebene parallel zu den Grundkanten der Pyramide. Jede dieser Grundkanten hat die Länge 5 Längeneinheiten (zentrische Streckung von O aus mit dem Streckfaktor 0,5).
Der Punkt R liegt senkrecht über dem Punkt Q und auf der Pyramidenkante BS. Die Strecke QR ist eine Kante des Quaders, dessen Volumen zu berechnen ist. Die Strecke QR ist halb so lang wie die Strecke OS (zentrische Streckung von B aus mit dem Streckfaktor 0,5) und zugleich die Höhe h des Quaders. Aus $\overline{OS} = 12$ folgt $h = 6$.

Koordinaten des Würfeleckpunkts U auf der Kante BS:
Der Würfeleckpunkt $T(t\,|\,t\,|\,0)$, $0 < t < 5$, liegt auf der Diagonalen BD in der Pyramidengrundfläche. Jede Würfelkante hat demnach die Länge $2t$. Der senkrecht über T liegende Eckpunkt des Würfels muss daher die x_3-Koordinate $2t$ haben. Dieser Eckpunkt $U(t\,|\,t\,|\,2t)$ liegt auf der Geraden durch B und S mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

F 122
F 1

Daraus folgt:
(I) $5 - 5v = t$
(II) $5 - 5v = t$
(III) $12v = 2t$
Aus (III) folgt: $t = 6v$
Mit (I) oder (II) erhält man $v = \frac{5}{11}$ und damit $t = \frac{30}{11}$.

Der Würfeleckpunkt auf der Kante BS ist $U\left(\frac{30}{11}\,\middle|\,\frac{30}{11}\,\middle|\,\frac{60}{11}\right)$.

Aufgabe B 1.2

a) Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird:
Da aus Gefäß G1 mit Zurücklegen gezogen wird, liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 20 vor.
Die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln sei X.
Für die Trefferwahrscheinlichkeit gilt: $p = \frac{6}{10} = 0{,}6$
Es liegt also eine $B_{20;0,6}$-Verteilung vor.
Man erhält: $P(X \geqq 12) = 1 - P(X \leqq 11) \approx 0{,}5956$ (GTR) F 231

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird beträgt ca. 59,6 %.

Wahrscheinlichkeit für zwei schwarze Kugeln in zwei direkt aufeinander folgenden Zügen:
Die Trefferwahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel aus Gefäß G2 beträgt $p = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
Da aus Gefäß G2 mit Zurücklegen gezogen wird, ändert sich diese Trefferwahrscheinlichkeit nicht.

Wir wählen folgende Bezeichnung: Ereignis A: Von acht gezogenen Kugeln sind genau zwei direkt nacheinander gezogene Kugeln schwarz.
Da die beiden schwarzen Kugeln direkt hintereinander gezogen werden, sind hier nicht alle möglichen Pfade einer Bernoulli-Kette interessant.
Mit einer Pfadregel folgt für die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Pfades:
$P(ss) = 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6$
Für dieses Ereignis A sind sieben Pfade günstig: F 211
sswwwwww, wsswwwww, …, wwwwwwss
Also gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(A) = 7 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}0741$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt ca. 7,4 %.

b) Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel schwarz ist:
Da ohne Zurücklegen gezogen wird, ändert sich die Trefferwahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel mit jedem Zug. F 201 F 211
Es sind drei Fälle für das Ziehen aus Gefäß G1 möglich:

Fall	Wahrscheinlichkeit für diesen Fall
1. Es wird keine schwarze Kugel aus G1 gezogen.	$\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$
2. Es wird genau eine schwarze Kugel aus G1 gezogen.	$2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$
3. Es werden zwei schwarze Kugeln aus G1 gezogen.	$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{15}$

Ziehen einer Kugel aus Gefäß G2:
Die Anzahl der schwarzen Kugeln in G2 und damit die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus G2 zu ziehen, hängt davon ab, welcher der drei Fälle beim Ziehen aus G1 eingetreten ist. Es können 3, 4 oder 5 schwarze Kugeln in G2 liegen. Die drei Fälle müssen entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden.
Ereignis B: Die Kugel, die aus G2 gezogen wird, ist schwarz.

Es gilt: $P(B) = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{12} + \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{12} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{12} = \frac{63}{180} = \frac{7}{20} = 0{,}35$

Die aus Gefäß G2 gezogene Kugel ist mit der Wahrscheinlichkeit 35 % schwarz.

Aufgabe B 2.1

a) Koordinatengleichung der Ebene E durch A, B, C und D:
Die Ebenengleichung hat die Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.
Die drei Punkte A, B und C liegen auf E. Daher macht man drei Punktproben.
Für Punkt $A(10|6|0)$ folgt: $a \cdot 10 + b \cdot 6 + c \cdot 0 = d$ (I)
Für Punkt $B(0|6|0)$ folgt: $a \cdot 0 + b \cdot 6 + c \cdot 0 = d$ (II)
Für Punkt $C(0|0|3)$ folgt: $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 3 = d$ (III)

F 125

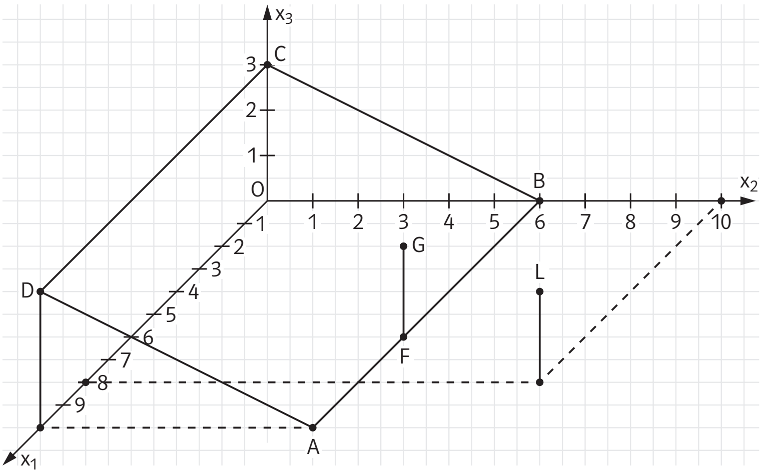
Das vereinfachte Gleichungssystem heißt:
(I) $10a + 6b = d$
(II) $6b = d$
(III) $3c = d$

Nun ist d beliebig wählbar. Zweckmäßigerweise wählt man ein gemeinsames Vielfaches von 3 und 6, um Bruchzahlen zu vermeiden. Das kleinste gemeinsame Vielfache ist 6.
Mit $d = 6$ erhält man $c = 2$, $b = 1$ und $a = 0$ (GTR).

F 9

Die Gleichung der Ebene E heißt $x_2 + 2x_3 = 6$.

Zeichnung:
Die Zeichnung ist bereits durch die in den folgenden Teilaufgaben relevanten Punkte ergänzt.



F 126
F 111

Berechnung der Weite α des Winkels zwischen dem Stab und der Platte:
Der auf der x_1x_2-Ebene senkrecht stehende Stab hat den Fußpunkt $F(5|6|0)$ und wegen der Länge von 2 Metern im Modell den anderen Endpunkt $G(5|6|2)$.

Der Vektor $\overrightarrow{FG}$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ein Normalenvektor der Platte (Ebene E) ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

F 101
F 102
F 151
F 155

Der gesuchte Winkel ist offenkundig ein spitzer Winkel.

Daher gilt: $\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{|0\cdot0+1\cdot0+2\cdot2|}{\sqrt{0^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{4}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Der Winkel zwischen Stab und Platte hat etwa die Weite 63,4°.

b) Schattenpunkt H des oberen Stabendes auf der Ebene E:
Der Lichtstrahl liegt auf der Geraden g durch die Punkte L und G. Die Gerade g schneidet die Ebene E im gesuchten Schattenpunkt H.

Gleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\10\\2\end{pmatrix} + t\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\10\\2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}8\\10\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}$

Bestimmung des Schnittpunkts H von g und E: F 121 F 133 a F 141 a

$$(10-4\cdot t) + 2\cdot(2+0\cdot t) = 6$$
$$14 - 4t = 6$$
$$t = 2$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix}8\\10\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt des oberen Stabendes auf der Ebene E ist H(2|2|2).

Begründung dafür, dass der Schatten des Stabs vollständig auf der Platte liegt:

Ein Punkt der Ebene liegt auf der Platte, wenn seine x_1-Koordinate zwischen 0 und 10 liegt (den x_1-Koordinaten von A und B), seine x_2-Koordinate zwischen 0 und 6 liegt (den x_2-Koordinaten von C und B) und seine x_3-Koordinate zwischen 0 und 3 liegt (den x_3-Koordinaten von A und C).
Alle diese Eigenschaften treffen auf die Koordinaten des Punktes H(2|2|2) zu.
Der Schattenpunkt des oberen Stabendes liegt also auf der Platte.
Der Schatten beginnt im Fußpunkt F des Stabs auf dem Rand der Platte.
Folglich liegt der Schatten des Stabs vollständig auf der Platte.

c) Gleichung der Ebene F, auf der sich die Lichtquelle bewegt:
Da diese Ebene F parallel zur x_1x_2-Ebene ist und die Lichtquelle L die x_3-Koordinate 2 hat, lautet eine Ebenengleichung $x_3 = 2$. F 125
Die möglichen Kollisionspunkte liegen daher auf der Schnittgeraden der Ebene E und der Ebene F.

Bestimmung der Schnittgeraden g der Ebenen E und F:
Aus $x_2 + 2x_3 = 6$ folgt mit $x_3 = 2$ zunächst $x_2 = 2$. x_1 kann beliebig gewählt werden, etwa $x_1 = s$. Dann erhält man: F 134 c

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Radius r des Kreises, auf dem sich L bewegt: F 102

Es gilt: $r = |\overrightarrow{LG}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2} = 5$

Koordinaten der beiden Kollisionspunkte:
Jeder Kollisionspunkt $K(k_1|k_2|k_3)$ liegt auf der Geraden g und hat von G den Abstand r.

Daraus folgt:

$$r = \left|\overrightarrow{KG}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0+s\\2\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}5-s\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(5-s)^2+4^2+0^2} = 5$$

Der GTR liefert die Lösungen $s_1 = 2$ und $s_2 = 8$.

Einsetzen dieser Parameterwerte in die Gleichung von g ergibt die Kollisionspunkte.

Die Kollisionspunkte sind $K_1(2|2|2)$ und $K_2(8|2|2)$.

F 161

Aufgabe B 2.2

a) Wahrscheinlichkeit $P(X \leqq 30)$:
Es liegt eine $B_{800;0,05}$-Verteilung vor.

F 231

Es gilt: $P(X \leqq 30) \approx 0{,}0571$ (GTR)

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens 30 fehlerhafte Bleistifte zu erhalten, beträgt ca. 5,7 %.

Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert abweicht:
Für den Erwartungswert von X gilt: $E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}05 = 40$
Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $P(31 \leqq X \leqq 49)$.
Es gilt: $P(31 \leqq X \leqq 49) = P(X \leqq 49) - P(X \leqq 30)$.
Die kumulierten Wahrscheinlichkeiten berechnet man mit dem GTR:
$P(31 \leqq X \leqq 49) \approx 0{,}8777$

F 232
F 231

Hinweis: Es gibt auch GTR-Modelle, die $P(31 \leqq X \leqq 49)$ direkt, also ohne Differenzbildung, berechnen können.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X um weniger als 10 vom Erwartungswert abweicht, beträgt ca. 87,8 %.

b) Nullhypothese H_0: $p \leqq 0{,}02$; Gegenhypothese H_1: $p > 0{,}02$
Es liegt ein rechtsseitiger Hypothesentest vor.
X ist die Anzahl der fehlerhaften Stifte.
Stichprobenumfang: $n = 800$
Signifikanzniveau: $5\,\% = 0{,}05$
Im Extremfall liegt eine $B_{800;0,02}$-Verteilung vor.
Gesucht ist das kleinste g, für das gilt: $P(X \geqq g) \leqq 0{,}05$
$P(X \geqq g) = 1 - P(X \leqq g-1) \leqq 0{,}05$
Gesucht ist demnach das kleinste g mit $P(X \leqq g-1) \geqq 0{,}95$.
Man erstellt mit dem GTR eine Wertetabelle für die kumulierte Binomialverteilung:

F 242

$g-1$	22	23	24
$P(X \leqq g-1)$	0,9436	0,9648	0,9788

Der GTR liefert $g-1 = 23$, also $g = 24$.

Man entscheidet sich gegen die Nullhypothese, falls man mindestens 24 fehlerhafte Stifte in der Stichprobe findet.

Alternative: Falls der GTR über einen inversen Binomialbefehl verfügt, kann man $g-1$ direkt mit dem GTR berechnen.