Abitur 2014

Aufgaben

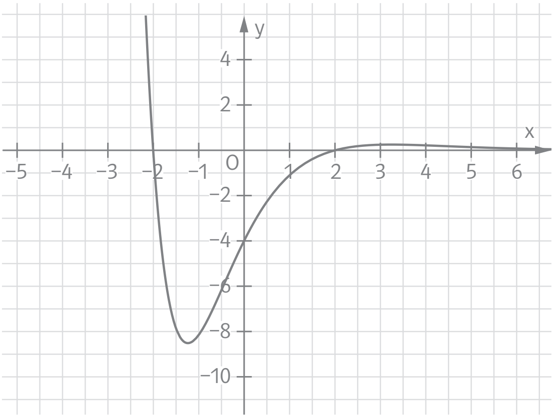
Prüfungsteil A (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 4)\,e^{-x}$.

3 P **a)** *Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (-x^2 - 2x + 2) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.* Tipp 1

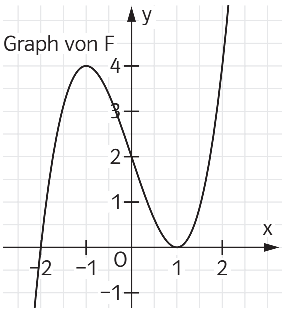
b) Der Graph der Funktion f sieht folgendermaßen aus:



3 P *Berechnen Sie die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.* Tipp 2

Aufgabe A2

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

6 P (4) $f(0) > 0$ Tipp 3

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Aufgabe A3

Gegeben sind die Ebene $E\colon x_1 + x_2 - 4x_3 = 11$, die Gerade

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ und der Punkt $P(3\,|\,4\,|\,3{,}5)$.

2 P **a)** *Begründen Sie, dass die Gerade g orthogonal zur Ebene E ist.* — Tipp 4

1 P **b)** (1) *Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.* — Tipp 5

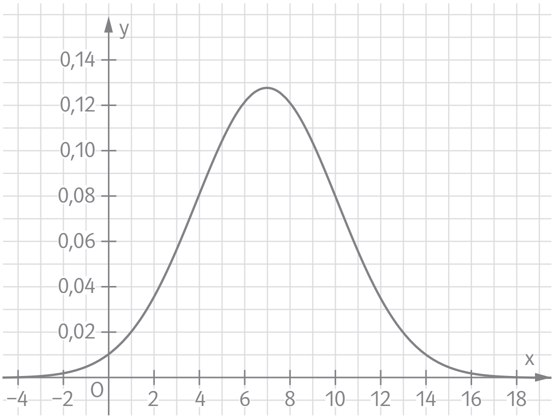
3 P (2) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q in der Ebene E, der vom Punkt P den kürzesten Abstand hat.* — Tipp 6

Aufgabe A4

a) Eine Zufallsvariable ist binomialverteilt mit $n = 400$ und $p = 0{,}2$. Mithilfe des Satzes von Moivre-Laplace soll ein Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit $P(X = 60)$ berechnet werden.

3 P *Beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgehen.* — Tipp 7
(Eine Berechnung des Näherungswerts ist dabei nicht erforderlich.)

b) X ist eine normalverteilte Zufallsvariable.
Der gegebene Graph gehört zu dieser Normalverteilung.
Es gilt $P(X < 3) = 0{,}1$.



3 P *Bestimmen Sie $P(3 < X \leq 11)$.* — Tipp 8

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Prüfungsteil B (mit Hilfsmittel)

Aufgabe B1

Ein Ölfeld wird seit Beginn des Jahres 1990 mit Bohrungen in mehreren Erdöl-führenden Schichten erschlossen. Die momentane Förderrate 1 aus diesem Ölfeld im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2009 kann im Intervall $[0;20]$ durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = (1020 - 40t) \cdot e^{0{,}1t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden. Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr und f(t) als Maßzahl zur Einheit 1000 Tonnen pro Jahr aufgefasst. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1990. Der Graph von f ist in der Abbildung 1 in dem für die Modellierung zu betrachtenden Intervall dargestellt.

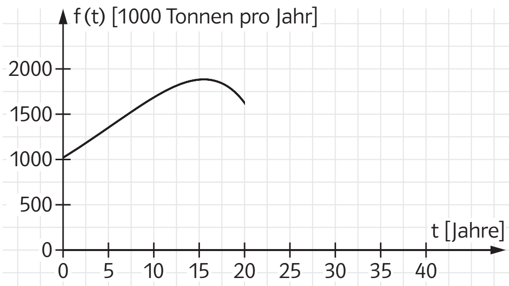


Abbildung 1

a) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2009, zu dem die Förderrate maximal ist, und berechnen*
11 P *Sie den Maximalwert.* Tipp 9
[Zur Kontrolle: $f'(t) = (62 - 4t) \cdot e^{0{,}1t}$]

b) Die Menge des Erdöls, das seit dem Beginn der Ölförderung Anfang 1990 bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t des betrachteten Zeitraums aus dem Ölfeld gefördert wurde, wird durch eine Funktion $M: t \mapsto M(t), \; 0 \leq t \leq 20$, beschrieben.

(1) *Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion F mit $F(t) = (14200 - 400t) \cdot e^{0{,}1t} + C$,*
3 P *$C \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion der Funktion f ist.* Tipp 10

(2) Die Gleichung der Funktion M ist eine Stammfunktion von f unter der Bedingung $M(0) = 0$.
3 P *Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion M.* Tipp 11

(3) *Berechnen Sie die gesamte Fördermenge aus dem Ölfeld von Anfang*
3 P *1990 bis Ende 2009.* Tipp 12

(4) *Ermitteln Sie die Einnahmen aus dem Verkauf des im Jahr 2007 geförderten Erdöls, wenn man von einem Verkaufspreis von 56 Euro pro Barrel im*
6 P *Jahr 2007 ausgeht.* 1 Barrel Erdöl (ca. 159 Liter) wiegt ca. 137 kg. Tipp 13

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Seit Anfang des Jahres 2010 schwächt sich der Rückgang der Förderrate ab. Diese soll im Intervall]20;40] daher durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = 180 \cdot e^{4-0{,}1t} + 40 \cdot e^2,\ t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden. Dabei wird wieder t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr und g(t) als Maßzahl zur Einheit 1000 Tonnen pro Jahr aufgefasst. Der Zeitpunkt $t = 20$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010. Die Abbildung 2 stellt die Graphen der Funktionen f und g in den jeweils für die Modellierung zu betrachtenden Intervallen dar.

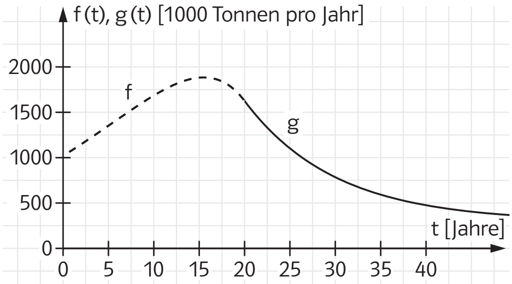


Abbildung 2

c) (1) *Begründen Sie anhand des Funktionsterms von g, warum die Funktion g die Förderrate nicht über einen längeren Zeitraum sinnvoll beschreiben*
4 P *könnte.* Tipp 14

(2) Der Betreiber kalkuliert, dass die Ölförderung für ihn nur wirtschaftlich ist, wenn innerhalb eines Kalenderjahres mindestens 600 000 Tonnen Öl gefördert werden.
Die Fördermenge im Intervall $[T;T+1]$, $20 < T \leqq 39$, lässt sich durch $J(T) = 40 \cdot e^2 + 1800 \cdot e^{4-0{,}1 \cdot T} \cdot (1-e^{-0{,}1})$ ermitteln.
Bestimmen Sie das letzte Kalenderjahr, für das die Ölförderung wirtschaft-
4 P *lich sein wird.* Tipp 15

d) Durch die Funktion h mit der Gleichung

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leqq t \leqq 20 \\ g(t), & 20 < t \leqq 40 \end{cases}$$

wird die Förderrate von Anfang 1990 bis Ende 2029 beschrieben.
Folgende Angaben dürfen ohne Nachweis verwendet werden:

$f(20) = 220\,e^2$	$f'(20) = -18\,e^2$	$f''(20) = -5{,}8\,e^2$
$g(20) = 220\,e^2$	$g'(20) = -18\,e^2$	$g''(20) = 1{,}8\,e^2$

(1) *Begründen Sie, dass die Funktion h an der Stelle $t = 20$ differenzierbar*
4 P *ist, und entscheiden Sie, ob h dort zweimal differenzierbar ist.* Tipp 16

(2) *Begründen Sie, dass h′ an der Stelle $t = 20$ ein lokales Minimum besitzt.*
[Hinweis: $f'' = (2{,}2 - 0{,}4t) \cdot e^{0{,}1t}$, $g''(t) = 1{,}8 \cdot e^{4-0{,}1t}$ darf ohne Nachweis
4 P verwendet werden.] Tipp 17

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Aufgabe B2

In ein Staubecken oberhalb eines Bergdorfes fließen zwei Bäche. Nach Regenfällen unterschiedlicher Dauer und Stärke können die momentanen Zuflussraten aus den beiden Bächen durch Funktionen f_a für den Bach 1 und g_a für den Bach 2 und die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen durch eine Funktion h_a für einen bestimmten Beobachtungszeitraum modelliert werden. Gegeben sind für $a > 0$ zunächst die Funktionsgleichungen

$$f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3a \cdot t^2 + 9a^2 \cdot t + 340, \; t \in \mathbb{R}, \text{ und}$$

$$h_a(t) = \frac{1}{2}t^3 - 7a \cdot t^2 + 24a^2 \cdot t + 740, \; t \in \mathbb{R}.$$

Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 h und $f_a(t)$, $g_a(t)$ sowie $h_a(t)$ als Maßzahlen zur Einheit $1\,\frac{m^3}{h}$ auf. Der Beobachtungszeitraum beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = 6a$. Die Graphen von f_4, g_4 und h_4 sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

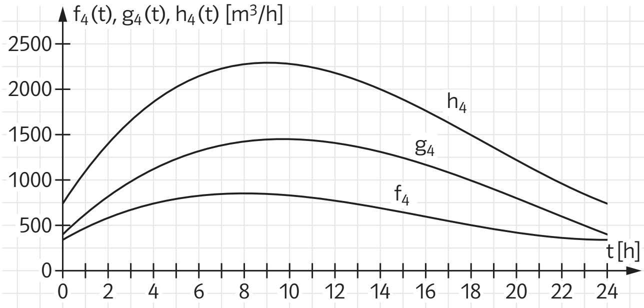


Abbildung 1

a) (1) *Berechnen Sie die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.* 3 P — Tipp 18

(2) *Zeigen Sie, dass für die Funktion g_a, die die Zuflussrate aus Bach 2 beschreibt, gilt:*

$$g_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4a \cdot t^2 + 15a^2 \cdot t + 400.$$

2 P — Tipp 19

(3) *Begründen Sie, dass unabhängig vom Parameter a ($a > 0$) die Zuflussrate aus Bach 2 für alle $t \in [0; 6a]$ größer ist als die Zuflussrate aus Bach 1.* 7 P — Tipp 20

(4) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Zeitpunkt $t_m \in [0; 6a]$, zu dem die Gesamtzuflussrate ihr Maximum annimmt.* 7 P — Tipp 21

(5) In der Vergangenheit betrug die Gesamtzuflussrate im Beobachtungszeitraum $[0; 6a]$ maximal $3800\,\frac{m^3}{h}$.
Ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Wert des Parameters a. 4 P — Tipp 22

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

5 P **b)** (1) *Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion h_a.* Tipp 23

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Gesamtzulaufrate am stärksten ändert.* 6 P Tipp 24

(3) *Geben Sie nun die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an.* 3 P Tipp 25

c) Im Folgenden sei $a = 4$: $h_4(t) = \frac{1}{2}t^3 - 28t^2 + 384t + 740,\ t \in [0;24]$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann das Staubecken noch $20\,000\ \text{m}^3$ Wasser aufnehmen.

(1) *Bestimmen Sie rechnerisch, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus den beiden Bächen während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.* 4 P Tipp 26

(2) Die Gleichung $\int_0^b h_4(t)\,dt = 20\,000$ hat die (positive) Lösung $b \approx 10{,}65$.

Geben Sie die Bedeutung dieser Lösung im Sachzusammenhang an. 2 P Tipp 27

(3) Um ein Überlaufen des Staubeckens zu verhindern, wird zum Zeitpunkt $t = 10$ ein vorher verschlossener Notablauf geöffnet. Durch diesen fließt Wasser mit einer konstanten Abflussrate von $2000\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ aus dem Staubecken ab. Der Notablauf bleibt bis zum Ende des Beobachtungszeitraums geöffnet.
Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass die Gesamtzuflussrate für $10 \leqq t \leqq 14$ größer und für $14 \leqq t \leqq 24$ kleiner als $2000\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ ist (vgl. Abbildung oben).

Untersuchen Sie, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft. 7 P Tipp 28

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Aufgabe B3

Ein Blatt DIN-A4-Papier liegt in der x_1x_2-Ebene. Gegeben sind seine Eckpunkte $O(0|0|0)$, $A(\sqrt{2}|0|0)$, $B(\sqrt{2}|1|0)$ und $C(0|1|0)$ sowie der Punkt $D(1|1|0)$.[1]

Das Blatt wird jetzt entlang der Strecke $\overline{OD}$ gefaltet. Das Dreieck ODC bleibt dabei fest, während das Viereck OABD in das Viereck OA'B'D übergeht, das wieder in der x_1x_2-Ebene liegt. Die Gegebenheiten sind in den folgenden Schrägbildern dargestellt.
Zur Veranschaulichung kann ein DIN-A4-Blatt entsprechend gefaltet werden.

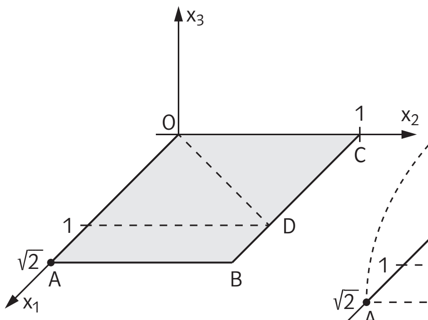


Abbildung 1

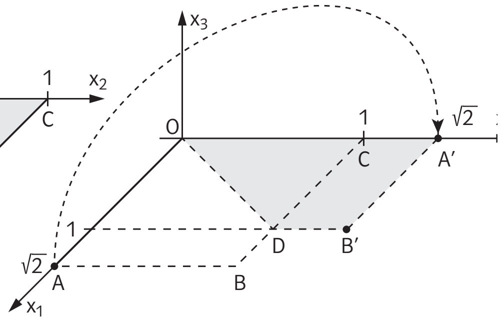


Abbildung 2

8 P **a)** *Bestimmen Sie den Abstand des Punktes B von der Geraden OD.* Tipp 29

b) Die Ecke des Blattes, die durch das Falten aus der Position A in die Position A' gebracht wird, bewegt sich bei dem Faltvorgang auf einem Halbkreis in einer Ebene E (siehe Abbildungen 1 bis 4).

7 P (1) *Leiten Sie je eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform und in Normalenform her.* Tipp 30
[Zur Kontrolle eine Koordinatengleichung: $E:\ x_1 + x_2 = \sqrt{2}$]

4 P (2) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ebene E mit der Geraden OD.* Tipp 31
$\left[\text{Zur Kontrolle: } S\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,0\right)\right]$

[1] Als Längeneinheit (LE) wird die Länge der kürzeren Seite des DIN-A4-Blattes verwendet.

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Während des Faltvorgangs liegt das beim Falten bewegte Papier-Viereck stets in einer Ebene E_k der durch $E_k\colon\ x_1 - x_2 + k \cdot x_3 = 0,\ k \in \mathbb{R}$, gegebenen Ebenenschar. Vorher und nachher liegt es jeweils in der x_1x_2-Ebene (siehe Abbildungen 1 bis 4).

c) (1) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade OD in jeder Ebene E_k der Ebenenschar liegt.* 4 P — Tipp 32

(2) *Begründen Sie, dass die Ebene E aus b) senkrecht zu jeder Ebene E_k, $k \in R$, ist.* 5 P — Tipp 33

Während des Faltvorgangs wird das beim Falten bewegte Papier-Viereck auch in die Position des Vierecks OA^*B^*D gebracht, das in einer sowohl zur x_1x_2-Ebene als auch zur Ebene E senkrechten Ebene E^* liegt (siehe Abbildung 3).

3 P (3) *Berechnen Sie den Wert des Parameters k, für den $E_k = E^*$ ist.* — Tipp 34

6 P (4) *Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes A^*.* — Tipp 35

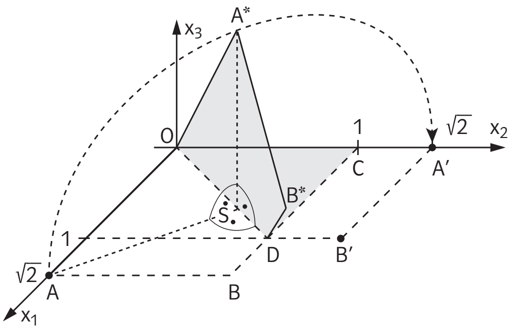


Abbildung 3

d) Während des Faltvorgangs kommt das beim Falten bewegte Papier-Viereck auch in die Position des Vierecks OA″B″D, dessen Punkt A″ in der Ebene $x_2 = 1$ liegt.

7 P (1) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes A″.* — Tipp 36

Zur Kontrolle: $A''\left(\sqrt{2}-1 \,|\, 1 \,|\, \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$

6 P (2) *Zeigen Sie, dass das Dreieck OCA″ gleichschenklig rechtwinklig ist.* — Tipp 37

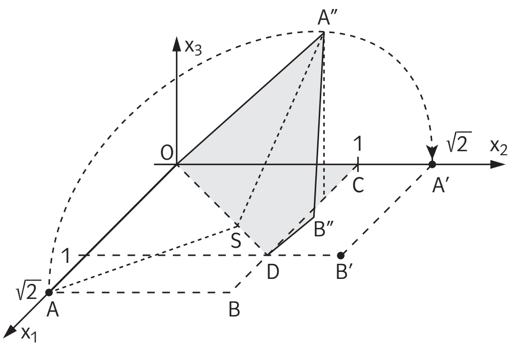


Abbildung 4

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Aufgabe B4

Das Produkt „Fußball-Bundesliga“ ist ein Erfolgsmodell. Die Zuschauerzahlen erreichten in der Saison 2011/12 einen Rekord von durchschnittlich mehr als 40 000 pro Spiel. Dabei ist das Publikum mittlerweile zu 25 % weiblich.
Dieser Prozentsatz soll im Folgenden als Wahrscheinlichkeit verwendet werden.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 200 bei einem Bundesliga-Spiel zufällig ausgewählten Zuschauern*[2]

2 P (1) *genau 48 weibliche Zuschauer befinden,* Tipp 38

3 P (2) *mindestens 35 und höchstens 60 weibliche Zuschauer befinden,* Tipp 39

(3) *eine Anzahl von weiblichen Zuschauern befindet, die um mindestens 10*
4 P *von ihrem Erwartungswert abweicht.* Tipp 40

b) Bei einem Bundesliga-Spiel strömen 20 000 Zuschauer ins Stadion. An weibliche Zuschauer soll ein Flyer verteilt werden, der auf ein spezielles Getränkeangebot hinweist.

(1) *Ermitteln Sie auf der Grundlage der 20 000 Zuschauer das zum Erwartungswert symmetrische Intervall kleinster Länge, in dem die Anzahl der weiblichen Zuschauer mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9*
5 P *liegt.* Tipp 41

(2) Vor dem Spiel bildet sich an einem Kassenhäuschen eine Schlange von 50 Zuschauern.
Nennen Sie eine Voraussetzung, unter der die Wahrscheinlichkeit P, dass sich in der Schlange 12 weibliche Zuschauer befinden, folgendermaßen berechnet werden kann:

$$P = \binom{50}{12} \cdot 0{,}25^{12} \cdot 0{,}75^{38}.$$

Entscheiden Sie, ob diese Berechnung in der vorliegenden Situation zuläs-
3 P *sig ist.* Tipp 42

c) Im Deutschen Fußballbund (DFB) sind 1 077 215 weibliche Mitglieder gemeldet[3], was einem Anteil von (ungefähr) 15,84 % entspricht. Von diesen gehören 31,78 % zur Altersklasse **„Mädchen“**, der Rest zur Altersklasse **„Frauen“**. Bei den männlichen Mitgliedern unterscheidet man die Altersklassen **„Junioren“** und **„Senioren“**. Insgesamt beträgt der Anteil der Jugendlichen („Mädchen“ und „Junioren“) im DFB 33,09 %.

2 P (1) *Berechnen Sie den Anteil der „Mädchen“ im DFB.* Tipp 43

(2) *Ermitteln Sie den Anteil der „Senioren“ im DFB.* Tipp 44
[Kontrollergebnis: 56,10 %]
5 P *Berechnen Sie näherungsweise die Anzahl der „Senioren“ im DFB.* Tipp 45

(3) Zwei Mitglieder des DFB werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei den beiden Perso-
3 P *nen um einen „Junior“ und einen „Senior“ handelt.* Tipp 46

---

[2] Der Begriff „Zuschauer“ soll stets männliche und weibliche Zuschauer umfassen.
[3] Gehen Sie davon aus, dass es sich um aktuelle Daten handelt.

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

d) Um den Stadionbesuch für weibliche Zuschauer attraktiver zu gestalten, werden für diese an den Imbissständen des Stadions spezielle Angebote gemacht. Der Verkaufsleiter vermutet, dass der Anteil weiblicher Zuschauer sogar auf über 25 % gestiegen ist, so dass er zusätzliche Vorräte für die speziellen Angebote bereitstellen müsste. Er möchte aber unbedingt vermeiden, auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen zu bleiben.
Um eine Entscheidung treffen zu können, nutzt er Fotos, die im Rahmen eines Anti-Hooligan-Programms von jedem einzelnen Zuschauer beim Einlass gemacht werden. Er lässt 1000 Fotos zufällig auswählen und in dieser Stichprobe die Anzahl der Fotos bestimmen, die weibliche Zuschauer zeigen.

(1) *Ermitteln Sie aus der Sicht des Verkaufsleiters einen passenden Hypothesentest für die genannte Stichprobe* — Tipp 47
und begründen Sie die Wahl der Nullhypothese (Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05). — Tipp 48
6 P

(2) *Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang* — Tipp 49
und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens für den Fall, dass der Anteil der weiblichen Zuschauer tatsächlich 30 % beträgt. — Tipp 50
3 P

(3) Die acht Helfer, die die Fotos auswerten, haben jeweils 125 Fotos zufällig ausgewählt. Sie haben folgende Regel aufgestellt: Zählen mindestens fünf der acht Helfer unter den 125 Fotos mehr als 33 Fotos weiblicher Zuschauer, so halten sie die Vermutung des Verkaufsleiters für bestätigt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem sich die maximale Wahrscheinlichkeit ermitteln lässt, mit der diese Regel zu einer falschen Entscheidung führt, und begründen Sie die einzelnen Schritte. (Sie brauchen die Rechnungen nicht durchzuführen.)
Gehen Sie dabei von der Voraussetzung aus, dass höchstens 25 % weibliche Zuschauer ins Stadion kommen. — Tipp 51
4 P

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Tipps

Folgende Tipps geben eine erste Hilfestellung:

Tipp 1	Gezeigt werden soll, dass F eine Stammfunktion ist.
Tipp 2	Berechnet werden soll die eingeschlossene Fläche.
Tipp 3	(1) F(1) können Sie am Graphen ablesen. (2) Das Integral können Sie durch Funktionswerte der Stammfunktion F ausdrücken. (3) Eine Nullstelle von F″ ist eine Nullstelle von f′. (4) f ist die Ableitung von F.
Tipp 4	Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt in einer Skizze.
Tipp 5	Führen Sie eine Punktprobe durch.
Tipp 6	Stellen Sie eine Gleichung der Lotgeraden l zur Ebene E durch den Punkt P auf.
Tipp 7	Machen Sie sich mit den Aussagen des Satzes von Moivre-Laplace vertraut.
Tipp 8	Beachten Sie, dass der Graph symmetrisch ist.
Tipp 9	Bestimmen Sie den Hochpunkt der Funktion f.
Tipp 10	Bilden Sie die Ableitung der Funktion F.
Tipp 11	Lösen Sie die Gleichung $F(0) = 0$.
Tipp 12	Anfang 1990 bis Ende 2009 beschreibt einen Zeitraum.
Tipp 13	Berechnen Sie die Anzahl der Barrel.
Tipp 14	Betrachten Sie den Grenzwert der Funktion g.
Tipp 15	Stellen Sie mithilfe des Aufgabentextes die notwendige Gleichung auf.
Tipp 16	Die Bedeutung von Differenzierbarkeit wäre hier hilfreich.
Tipp 17	Begründet werden soll ein lokales Minimum.
Tipp 18	Die Gesamtzuflussrate wird durch die Funktion h_a angegeben.
Tipp 19	Die Gesamtzuflussrate setzt sich aus den momentanen Zuflussraten der beiden Bäche zusammen.
Tipp 20	Bilden Sie die Differenzfunktion $d_a(t) = g_a(t) - f_a(t)$. Welcher Funktionstyp liegt vor?
Tipp 21	Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion h_a im Intervall $[0; 6a]$ und prüfen Sie, ob es sich auch um absolute Extrema handelt.
Tipp 22	Beachten Sie, dass die Maximalstelle t_m in der vorhergehenden Teilaufgabe berechnet wurde und dass der zugehörige Parameter a gesucht ist.
Tipp 23	Ermitteln Sie die Wendestelle der Funktion h_a.
Tipp 24	Beachten Sie die Steigungen der Funktion h_a an den Rändern des Definitionsbereiches.
Tipp 25	Fassen Sie die Ergebnisse von b(1) und b(2) zusammen.

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Tipp 26	Überlegen Sie, wie man aus der Zulaufrate die zugeflossene Wassermenge erhält.
Tipp 27	Welche Bedeutung kommt der oberen Grenze b des Integrals zu?
Tipp 28	Berechnen Sie, wie viel m^3 Wasser bis zu $t = 10$ im Becken sind, wie viel m^3 Wasser zwischen $t = 10$ und $t = 14$ dazukommen und welche Konsequenz sich für das Wasservolumen im Zeitraum $t > 14$ ergibt.
Tipp 29	Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden OD. Wie lautet ein beliebiger Punkt der Geraden OD?
Tipp 30	Stellen Sie zunächst eine Parametergleichung der Ebene E auf. Die Ebene wird aufgespannt durch die Vektoren $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Tipp 31	Ein beliebiger Punkt der Geraden OD ist z.B. gegeben durch $P_r(r\,\|\,r\,\|\,0)$ $(r \in \mathbb{R})$.
Tipp 32	Führen Sie eine Punktprobe für $P_r(r\,\|\,r\,\|\,0)$ in E_k durch.
Tipp 33	Die Ebene E steht senkrecht zu jeder Ebene E_k, $k \in \mathbb{R}$, wenn die Normalenvektoren der Ebenen E und E_k für alle $k \in \mathbb{R}$ orthogonal sind.
Tipp 34	Formulieren Sie eine Bedingung für die Orthogonalität der Ebene E_k zur x_1x_2-Ebene.
Tipp 35	Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S.
Tipp 36	Stellen Sie drei Bedingungen für die Koordinaten des Punktes A'' auf.
Tipp 37	Wenn ein Dreieck wenigstens zwei gleich lange Seiten hat, dann ist es gleichschenklig.
Tipp 38	Die Zufallsvariable X (Anzahl der weiblichen Zuschauer) ist binomialverteilt.
Tipp 39	Die Zufallsvariable X (Anzahl der weiblichen Zuschauer) ist binomialverteilt.
Tipp 40	Wie berechnet man den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen X?
Tipp 41	Wie berechnet man den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen X?
Tipp 42	Was sind die Voraussetzungen, dass eine Zufallsvariable binomialverteilt ist?
Tipp 43	Sie kennen den Anteil der weiblichen Mitglieder und den Anteil der „Mädchen“ an den weiblichen Mitgliedern.
Tipp 44	Sie haben die Wahl, ob Sie den Anteil der „Senioren“ aus den anderen gegebenen Anteilen berechnen oder ob Sie mit den Anzahlen arbeiten.
Tipp 45	Aus c) (1) (oder wegen des Kontrollergebnisses) ist Ihnen der Anteil der Senioren bekannt.
Tipp 46	Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm.
Tipp 47	Um welche Art eines Hypothesentests handelt es sich hier?
Tipp 48	Welches Risiko möchte der Verkaufsleiter begrenzen?
Tipp 49	Wann begeht man einen Fehler 2. Art?
Tipp 50	Wo muss das Ergebnis der Stichprobe liegen, damit man einen Fehler 2. Art begeht?
Tipp 51	Hier müssen Sie nacheinander zwei binomialverteilte Zufallsvariablen betrachten.

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Folgende Tipps geben eine weitere Hilfestellung:

Tipp 1	Bilden Sie $F'(x)$.
Tipp 2	Berechnen Sie das Integral über der Funktion f zwischen den beiden Nullstellen.
Tipp 3	(1) Auch $F'(1)$ können Sie aus der Grafik entnehmen. (2) Allgemein gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. (3) Der Graph von F hat die Wendestelle $x_W = 0$. (4) $f(0)$ kann als Steigung des Graphen von F gedeutet werden.
Tipp 4	Zeigen Sie, dass der Richtungsvektor $\vec{u_g}$ von g ein Vielfaches des Normalenvektors $\vec{n_E}$ von E ist.
Tipp 5	Setzen Sie die Koordinaten von P in die Gleichung von E ein.
Tipp 6	Der Punkt Q ist der Schnittpunkt der Lotgeraden l zur Ebene E durch den Punkt P mit der Ebene E.
Tipp 7	Sie können $P(X = 60)$ näherungsweise mit $\varphi_{\mu;\sigma}(60)$ berechnen. Dabei müssen Sie für μ und σ den Erwartungswert bzw. die Standardabweichung der binomialverteilten Zufallsvariablen X einsetzen.
Tipp 8	Der Graph ist symmetrisch zur Achse $x = \mu = 7$. Zudem liegt das Intervall $[3; 11]$ ebenfalls symmetrisch zu $x = \mu = 7$. Die Gesamtfläche unter dem Graphen hat den Flächeninhalt 1.
Tipp 9	Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion f unter Zuhilfenahme von Faktor-, Produkt- und Kettenregel, und verwenden Sie die notwendige und hinreichende Bedingung zur Feststellung einer lokalen Extremstelle.
Tipp 10	Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion F unter Zuhilfenahme von Faktor-, Produkt- und Kettenregel.
Tipp 11	Beachten Sie die Bedingung $M(0) = 0$.
Tipp 12	Der Zeitraum beträgt 20 Jahre.
Tipp 13	Berechnen Sie zuerst die geförderte Erdölmenge für das Jahr 2007 in Mio. kg und dividieren dies durch 137 kg (entspricht 1 Barrel).
Tipp 14	Setzen Sie in der Funktion g für t große Zahlen ein.
Tipp 15	Lösen Sie die Gleichung $J(T) = 600$ mithilfe des GTR.
Tipp 16	Lesen Sie die Tabelle aufmerksam und vergleichen Sie die Ergebnisse.
Tipp 17	Der Monotoniesatz kann behilflich sein.
Tipp 18	Setzen Sie in den Funktionsterm von h_a einmal 0 und einmal $6a$ ein.
Tipp 19	Berechnen Sie $g_a(t) = h_a(t) - f_a(t)$.
Tipp 20	Bestimmen Sie die Nullstellen der quadratischen Differenzfunktion $d_a(t)$ und vergleichen Sie diese mit den Intervallgrenzen 0 und $6a$.

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Tipp 21	Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion h_a und verwenden Sie die notwendige und hinreichende Bedingung für lokale Extrema. Vergleichen Sie dann die y-Werte der lokalen Extrema mit den Werten von h_a an den Grenzen des Definitionsbereiches.
Tipp 22	Setzen Sie die Maximalstelle t_m in den Term von h_a ein.
Tipp 23	Ermitteln Sie mithilfe der 2. und 3. Ableitung von h_a über die notwendige und hinreichende Bedingung die Wendestelle der Funktion h_a.
Tipp 24	Berechnen Sie die Steigungen von h_a an den Intervallgrenzen 0 und $6a$ und vergleichen Sie mit der Steigung an der Wendestelle.
Tipp 25	Was bedeuten die Ergebnisse von $b(1)$ und $b(2)$?
Tipp 26	Berechnen Sie $\int_0^{24} h_4(t)\,dt$.
Tipp 27	Überlegen Sie, welche Bedeutung b hat, wenn das entsprechende Integral 20 000 ergibt.
Tipp 28	Ermitteln Sie $\int_0^{10} h_4(t)\,dt$ so wie $\int_{10}^{14} (h_4(t) - 2000\,dt)$. Erklären Sie die Bedeutung dieser Integrale und erläutern Sie, warum ein entsprechendes Integral von $t = 14$ bis $t = 24$ für das Problem des Überlaufens keine Relevanz hat.
Tipp 29	Ein beliebiger Punkt der Geraden OD ist z. B. gegeben durch $P_r(r\,\vert\,r\,\vert\,0)$ $(r \in \mathbb{R})$. $\vert\overrightarrow{BP_r}\vert$ ist der Abstand von $B(\sqrt{2}\,\vert\,1\,\vert\,0)$ zu $P_r(r\,\vert\,r\,\vert\,0)$.
Tipp 30	Zur Bestimmung einer Koordinatengleichung ermitteln Sie zunächst einen Normalenvektor von E.
Tipp 31	Setzen Sie $P_r(r\,\vert\,r\,\vert\,0)$ in die Koordinatengleichung von E ein.
Tipp 32	Für alle Werte $k \in \mathbb{R}$ muss sich eine wahre Aussage ergeben.
Tipp 33	Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{n_E} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{n_{E_k}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\k\end{pmatrix}$.
Tipp 34	Geben Sie einen Normalenvektor der x_1x_2-Ebene an.
Tipp 35	Der Punkt A* hat die Form: $A^*\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle\vert\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle\vert\,a_3{}^*\right)$. Zusätzlich gilt: $\vert\overrightarrow{A^*S}\vert = \vert\overrightarrow{AS}\vert$.
Tipp 36	Für den Punkt $A''(a_1''\,\vert\,a_2''\,\vert\,a_3'')$ gilt: (1) er liegt in der Ebene E, (2) er liegt in der zur x_1x_3-Ebene parallelen Ebene zu $x_2 = 1$, (3) er hat vom Ursprung denselben Abstand wie der Punkt A. Formulieren Sie aus den Eigenschaften (1)–(3) Bedingungen für die Koordinaten von A″.
Tipp 37	An welchem Eckpunkt kann ein rechter Winkel in diesem Fall nur vorliegen?
Tipp 38	Berechnen Sie mit dem GTR $P(X = 48)$.
Tipp 39	Berechnen Sie mit dem GTR $P(35 \leqq X \leqq 60)$.
Tipp 40	Der Erwartungswert ist 50. Gesucht ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(X \leqq 40)$ und $P(X \geqq 60)$.

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Tipp 41	Der Erwartungswert ist 5000. Die Bedingung lautet: $P(5000 - a \leqq X \leqq 5000 + a) \geqq 0{,}9$.
Tipp 42	Dass die beiden Bedingungen für eine Binomialverteilung hier erfüllt sind, müssen Sie anhand des Aufgabentextes begründen.
Tipp 43	Sie müssen hier einen Anteil eines Anteils berechnen.
Tipp 44	Bestimmen Sie die Anzahl der männlichen Mitglieder und dann die Anzahl der „Junioren“.
Tipp 45	Bestimmen Sie die Anzahl aller Mitglieder des DFB.
Tipp 46	Wie viele Pfade sind günstig für das Eintreten des Ereignisses: Ein „Junior“ und ein „Senior“?
Tipp 47	Es handelt sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest.
Tipp 48	Bei welcher Nullhypothese kann der Verkaufsleiter das Risiko, zu viele Vorräte zu kaufen, auf 5 % begrenzen?
Tipp 49	Einen Fehler 2. Art begeht man, wenn man eine Nullhypothese aufgrund des Tests nicht ablehnt, obwohl diese in Wirklichkeit falsch ist. Stellen Sie diese Situation im Sachzusammenhang dar. Beachten Sie für die Rechnung, dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit, dass ein Zuschauer weiblich ist, gegeben ist.
Tipp 50	Einen Fehler 2. Art begeht man, falls das Ergebnis der Stichprobe nicht im Ablehnungsbereich von H_0 liegt.
Tipp 51	Die Zufallsvariable X kann im Grenzfall als binomialverteilt mit $n = 125$ und $p = 0{,}25$ angenommen werden. Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit p^*, dass einer der Helfer mehr als 33 Fotos mit weiblichen Zuschauern hat.

Folgende Tipps helfen, Lücken zu schließen:

Tipp 1	Zeigen Sie, dass $F'(x) = f(x)$.
Tipp 2	Erarbeiten Sie die Fertigkeit **F 27**.
Tipp 3	(1) Bearbeiten Sie aus **F 44** das Beispiel 1 a) und die Aufgabe a). (2) Bearbeiten Sie aus **F 44** das Beispiel 2 a) und die Aufgabe b). (3) Bearbeiten Sie aus **F 44** das Beispiel 1 b) und die Aufgabe d). (4) Vergleichen Sie das Ergebnis von $F'(0)$ mit der Steigung des Graphen von F an der Stelle 0.
Tipp 4	Bearbeiten Sie aus **F 61** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben 1 und 2.
Tipp 5	Bearbeiten Sie aus **F 66** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben 1 und 2.
Tipp 6	Bearbeiten Sie aus **F 70 a** das Beispiel und die Aufgabe 1 aus **F 70**. Bearbeiten Sie aus **F 81** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 7	Bearbeiten Sie aus **F 112** das Beispiel 6 und die Aufgabe 5.
Tipp 8	Bearbeiten Sie aus **F 111** das Beispiel 3.
Tipp 9	Bearbeiten Sie aus der Fertigkeit **F 20** Beispiel b).

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Tipp 10	Bearbeiten Sie aus der Fertigkeit **F 20** Beispiel b).
Tipp 11	Lösen Sie $M(0) = (14\,200 - 400 \cdot 0) \cdot e^{0{,}1 \cdot 0} + C = 0$, um das C zu berechnen und somit die Gleichung aufstellen zu können.
Tipp 12	Berechnen Sie mithilfe des GTR: $M(20)$.
Tipp 13	Bilden Sie das Produkt aus der Anzahl der Barrel und dem entsprechenden Preis pro Barrel.
Tipp 14	Vergleichen Sie die Ergebnisse großer Werte für t.
Tipp 15	Interpretieren Sie die Lösung als Jahreszahl.
Tipp 16	Aus der Tabelle lässt sich ablesen, dass $f(20) = g(20)$ und $f'(20) = g'(20)$. Daraus folgt die Differenzierbarkeit an der entsprechenden Stelle.
Tipp 17	Bearbeiten Sie aus der Fertigkeit **F 23** Beispiel 2.
Tipp 18	Beachten Sie beim Einsetzen in den Funktionsterm, dass bei den ersten beiden Summanden der gesamte Term $6a$ potenziert werden muss.
Tipp 19	Setzen Sie die beiden Terme $h_a(t)$ und $f_a(t)$ in Klammern und beachten Sie das Minuszeichen.
Tipp 20	Beachten Sie aus **F 2** Beispiel b) und nutzen Sie aus, dass $\sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}} > \sqrt{9a^2}$ ist. Überlegen Sie, welche Konsequenz sich aus der Lage der Nullstellen für das Vorzeichen der Funktionswerte der nach unten geöffneten Parabel ergibt.
Tipp 21	Beachten Sie **F 9**, **F 10**, **F 11** und bearbeiten Sie aus **F 20** das Beispiel a) sowie die Aufgabe a). Lösen Sie dann aus **F 21** die Beispiele a) und c) und machen Sie sich die Notwendigkeit der Randwertbetrachtung bewusst.
Tipp 22	Bestimmen Sie mithilfe des GTR eine Näherungslösung für die hergeleitete Gleichung dritten Grades.
Tipp 23	Beachten Sie **F 9**, **F 10**, **F 11** und bearbeiten Sie aus **F 22** das Beispiel 1 sowie die Aufgaben a) und b).
Tipp 24	Die stärkste Änderung der Gesamtzuflussrate liegt an der globalen Extremstelle von h_a' vor. Arbeiten Sie daher nochmals **F 21** (bezogen auf h_a') durch.
Tipp 25	Die stärkste Abnahme der Gesamtzuflussrate liegt an der globalen Minimalstelle von h_a' vor. Arbeiten Sie daher wiederum **F 21** (bezogen auf h_a') durch.
Tipp 26	Bearbeiten Sie aus **F 25** das Beispiel 1 a) sowie die Aufgaben 1 a) und 1 c) und aus **F 28** die Beispiele 3 und 4 sowie die Aufgaben 1 a), 2 a) und 2 c).
Tipp 27	Die Bedeutung der Variablen b wird Ihnen durch das Beispiel 3 aus **F 28** vermittelt.
Tipp 28	Überlegen Sie, wie viel m^3 Wasser bis zum Zeitpunkt $t = 10$ abfließen, wie viel m^3 im Zeitraum $t = 10$ bis $t = 14$ abfließen wie die Bilanz des Wasserzuflusses/-abflusses für die Zeit von $t = 14$ bis $t = 24$ aussieht.
Tipp 29	Die Länge $\lvert\overrightarrow{BP_r}\rvert$ ist eine Funktion mit der Variablen r. Gesucht ist das Minimum dieser Funktion in Abhängigkeit von r. Bearbeiten Sie aus **F 82** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben a) und b).

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Tipp 30	Bearbeiten Sie aus **F 65** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1. Bearbeiten Sie aus **F 8** die Beispiele 2 und 3 und die Aufgabe 2.
Tipp 31	Bearbeiten Sie aus **F 70 a** das Beispiel und die Aufgabe 1 aus **F 8**.
Tipp 32	Bearbeiten Sie aus **F 91** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 33	Bearbeiten Sie aus **F 59** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 34	Bestimmen Sie den Wert von k so, dass das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{n_{E_k}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Wert Null hat. Bearbeiten Sie aus **F 59** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 35	Bearbeiten Sie aus **F 56** das Beispiel 2 und die Aufgabe. Bearbeiten Sie aus **F 53** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 36	Bearbeiten Sie aus **F 66** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben 1 und 2. Bearbeiten Sie aus **F 80** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 37	Bearbeiten Sie aus **F 53** das Beispiel und die Aufgabe. Bearbeiten Sie aus **F 59** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 38	Bearbeiten Sie aus **F 101** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1a).
Tipp 39	Bearbeiten Sie aus **F 101** das Beispiel 4 und die Aufgabe 1f).
Tipp 40	Bearbeiten Sie aus **F 101** die Beispiele 2 und 3 und die Aufgaben 1b) bis 1e).
Tipp 41	Berechnen Sie mit dem GTR eine geeignete Wertetabelle für den Term $P(X \leqq 5000 + a) - P(X \leqq 4999 - a)$. Bearbeiten Sie aus **F 101** die Beispiele 2 und 3 und die Aufgaben 1b) bis 1e).
Tipp 42	Die beiden Bedingungen lauten: 1) Es gibt genau zwei mögliche Ausgänge. 2) Die Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht. Belegen Sie mithilfe des Aufgabentextes, dass die zweite Bedingung erfüllt ist.
Tipp 43	Den Anteil eines Anteils erhalten Sie durch Multiplikation der Anteile.
Tipp 44	Sie können den Anteil der „Senioren" als Quotient der Anzahl der Senioren und der Anzahl aller Mitglieder ausdrücken.
Tipp 45	Sie können die Anzahl der „Senioren" als Produkt des Anteils der Senioren und der Anzahl aller Mitglieder berechnen.
Tipp 46	Bearbeiten Sie aus **F 96** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 47	Lesen Sie den Einführungstext von **F 106** und bearbeiten Sie das Beispiel 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 48	Lesen Sie den Einführungstext von **F 106**.
Tipp 49	Lesen Sie den Einführungstext von **F 106**.
Tipp 50	Bearbeiten Sie aus **F 106** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 51	Die Zufallsvariable Y (Anzahl der Helfer, die mehr als 33 Fotos mit weiblichen Zuschauern haben) ist binomialverteilt mit n = 8 und $p = p^*$.

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Lösungen

Prüfungsteil A (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabe A1

a) $F(x) = (-x^2 - 2x + 2) \cdot e^{-x}$ F 12

$F'(x) = (-2x - 2) \cdot e^{-x} + (-x^2 - 2x + 2) \cdot (-e^{-x}) = (x^2 - 4) \cdot e^{-x} = f(x)$ F 9 F 14

b) Der Graph verläuft vollständig unterhalb der x-Achse; deshalb können bei der Flächenberechnung direkt Betragsstriche gesetzt werden.

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4) \cdot e^{-x} dx \right| = \left| \left[(-x^2 - 2x + 2) \cdot e^{-x} \right]_{-2}^{2} \right| = \left| -6e^{-2} - 2e^2 \right|$$ F 27

Aufgabe A2

(1) Die Aussage ist wahr.

Begründung:
Ablesen am Graphen: $F(1) = 0$
Die Steigung des Graphen von F an der Stelle $x = 1$ hat den Wert 0, da $T(1\,|\,0)$ ein Tiefpunkt von F ist. Daher gilt: $F'(1) = 0$.
Da F eine Stammfunktion von f ist, d.h. $F'(x) = f(x)$ gilt, folgt: $F'(1) = f(1) = 0$. F 43

(2) Die Aussage ist falsch.

Begründung:
Es gilt: $\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2 \neq 4$.
F(2) und F(0) werden aus der Grafik abgelesen. F 44

(3) Die Aussage ist wahr.

Begründung:
Da $f(x) = F'(x)$ ist, folgt: $f'(x) = F''(x)$.
Am Graphen von F erkennt man die Wendestelle $x_W = 0$.
Daher gilt einerseits $F''(0) = 0$, andererseits $f'(0) = F''(0)$ und demzufolge ist auch $f'(0) = 0$.
Also hat f' im Intervall $[-1; 1]$ eine Nullstelle. F 44

(4) Die Aussage ist falsch.

Begründung:
Es gilt $F'(x) = f(x)$, also $F'(0) = f(0)$.
$F'(0)$ entspricht der Steigung des Graphen von F an der Stelle $x = 0$, diese beträgt näherungsweise -3, d.h. $F'(0) < 0$.
Daher ist auch $f(0) < 0$. F 44

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Aufgabe A3

a) Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E, wenn der Richtungsvektor $\overrightarrow{u_g}$ von g ein Vielfaches des Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$ von E ist. Dies ist hier der Fall: F 61

$\overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, also: $\overrightarrow{u_g} = -2 \cdot \overrightarrow{n_E}$.

Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.

b) (1) Punktprobe: $3 + 4 - 4 \cdot 3{,}5 = -7 \neq 11$, daher liegt P nicht in E. F 66

(2) Der Punkt Q ist der Schnittpunkt der Lotgeraden l zur Ebene E durch den Punkt P mit der Ebene E.

Gleichung der Lotgeraden: $l\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. F 61

Ein beliebiger Punkt der Geraden l ist daher gegeben durch: F 81
$P_r(3 + r \,|\, 4 + r \,|\, 3{,}5 - 4r)$. F 70
Einsetzen in E liefert: $3 + r + 4 + r - 4 \cdot (3{,}5 - 4r) = 11 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1$.

Durch Einsetzen in l erhält man den Schnittpunkt $Q(4 \,|\, 5 \,|\, -0{,}5)$.

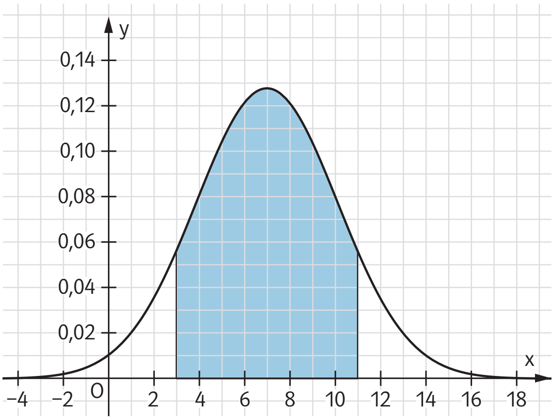
Aufgabe A4

a) Zuerst berechnet man den Erwartungswert und die Standardabweichung der binomialverteilten Zufallsvariablen X.
Es gilt: $\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}2 = 80$ und F 102

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{64} = 8$

Nach dem Satz von Moivre-Laplace gilt $P(X = 60) \approx \varphi_{80;8}(60)$. F 112

b) Der Hochpunkt des Graphen liegt an der Stelle $x_1 = 7$. Somit gilt $\mu = 7$.



Das Intervall [3; 11] liegt symmetrisch zum Erwartungswert μ. Da der Graph symmetrisch zur Achse x = 7 ist, folgt $P(3 < X \leqq 11) = 1 - 2 \cdot P(X < 3)$.
Mit $P(X < 3) = 0{,}1$ erhält man: $P(3 < X \leqq 11) = 1 - 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}8$

Die Wahrscheinlichkeit $P(3 < X \leqq 11)$ beträgt 0,8. F 111

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Prüfungsteil B (mit Hilfsmittel)

Aufgabe B1

a) Bestimmt werden soll der Zeitpunkt der maximalen Förderrate und die maximale Förderrate. Dazu sind die Koordinaten des Hochpunktes zu berechnen.

$f'(t) = -40 \cdot e^{0,1t} + (1020 - 40t) \cdot 0,1 \cdot e^{0,1t} = (-40 + 102 - 4t) \cdot e^{0,1t} = (62 - 4t) \cdot e^{0,1t}$

$f''(t) = -4 \cdot e^{0,1t} + (62 - 4t) \cdot 0,1 \cdot e^{0,1t} = (-4 + 6,2 - 0,4t) \cdot e^{0,1t} = (2,2 - 0,4t) \cdot e^{0,1t}$

Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: $f'(t) = 0$.
$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (62 - 4t) \cdot e^{0,1t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 62 - 4t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 15,5$

Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle: $f'(t) = 0 \ \wedge \ f''(t) \neq 0$
$f'(15,5) = 0 \ \wedge \ f''(15,5) = (2,2 - 0,4 \cdot 15,5) \cdot e^{0,1 \cdot 15,5} = -4 \cdot e^{1,55} < 0$

Randstellenbetrachtung:
$f(0) = 1020$
$f(15,5) = 400 \cdot e^{1,55} \approx 1884,59$
$f(20) \approx 1625,59$
$f(0) < f(15,5) > f(20)$

Maximale Förderungsrate für $t = 15,5$, also Mitte 2005.
Die maximale Förderrate beträgt ungefähr 1,884 Mio. Tonnen pro Jahr.

b) (1) Nachweis, dass F eine Stammfunktion von f ist: $F'(t) = f(t)$.

$$\begin{aligned} F'(t) &= -400 \cdot e^{0,1t} + (14\,200 - 400t) \cdot 0,1 \cdot e^{0,1t} \\ &= (-400 + 1420 - 40t) \cdot e^{0,1t} \\ &= (1020 - 40t) \cdot e^{0,1t} = f(t) \end{aligned}$$

(2) $F(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (14\,200 - 400 \cdot 0) \cdot e^{0,1 \cdot 0} + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -14\,200$

$M(t) = (14\,200 - 400t) \cdot e^{0,1t} - 14\,200$

(3) 1990 bis 2009 $\to$ 20 Jahren $\to t = 20$
Der GTR liefert: $M(20) = 31612,1$.

31,612 Mio. Tonnen Erdöl wurden in 20 Jahren gefördert.

(4) Zuerst muss die geförderte Erdölmenge für 2007 berechnet werden. Diese berechnet man, indem man die die Differenz der Mengen nach 18 und 17 Jahren bildet:
Der GTR liefert: $M(18) - M(17) = 1840,32$.
Die geförderte Erdölmenge im Jahr 2007 ist 1,84032 Mio. Tonnen.
$1,84032$ Mio. t $= 1,84032 \cdot 10^6$ Mio. kg $= 1,84032 \cdot 10^9$ kg
137 kg entsprechen 1 Barrel.
$1,84032 \cdot 10^9 : 137 = 1,3433 \cdot 10^7 = 13\,433 \cdot 10^3$ (Barrel)
Die Einnahmen ergeben sich als Produkt der Anzahl der Barrel und dem entsprechenden Preis pro Barrel:
$E = 13\,433 \cdot 10^3 \cdot 56\,€ = 752\,248\,000\,€$

Die Einnahmen des 2007 geförderten Erdöls betragen 752 248 000 Euro.

F 14
F 10
F 12
F 13
F 20

F 14
F 10
F 12
F 13

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

c) (1) Ein längerer Zeitraum lässt sich mithilfe des Grenzwertes beschreiben:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} (180 - e^{4-0{,}1t} + 40\cdot e^2) = \underbrace{40\cdot e^2}_{\text{konstanter Wert}}$$

Ab einem bestimmten Zeitpunkt wird kein Erdöl mehr gefördert.
Der berechnete Wert verändert sich nicht mehr.

(2) $J(T) = 600$
Der GTR liefert: $T = 34{,}2491$.
$T = 20$ bedeutet im Kontext das Jahr 2010.
$T = 34{,}2491$ bedeutet in etwa das Jahr 2024.

Im Jahr 2024 wird die Förderung ein letztes Mal wirtschaftlich sein.

d) (1) Aus der Tabelle lässt sich ablesen, dass $f(20) = g(20)$ und $f'(20) = g'(20)$, damit ist die Funktion h an der Stelle $t = 20$ differenzierbar.
Damit die Funktion an der entsprechenden Stelle zweimal differenzierbar ist, müsste $f''(20) = g''(20)$ sein. Aus der Tabelle lässt sich ebenfalls ablesen, dass $f''(20) \neq g''(20)$.

Somit kann die Funktion an der entsprechenden Stelle nicht zweimal differenzierbar sein.

(2) Aus der Funktionsgleichung lässt sich ablesen, dass
$h''(t) = f''(t) = (2{,}2 - 0{,}4t)\cdot e^{0{,}1t}$ für das erste Teilintervall und
$h''(t) = g''(t) = 1{,}8\cdot e^{4-0{,}1t}$ für das zweite Teilintervall.
$f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5{,}5$ bedeutet: Für $5{,}5 < t < 20$ ist $h''(t) < 0$. Folglich ist h′ streng monoton fallend (Monotoniesatz). Für $20 < t \leq 40$ ist $h''(t) > 0$. Folglich ist h′ streng monoton steigend (Monotoniesatz).

Damit besitzt h′ an der Stelle $t = 20$ ein lokales Minimum (Monotoniesatz).

F 23

Aufgabe B2

a) (1) $h_a(0) = 740$

$$h_a(6a) = \frac{1}{2}\cdot(6a)^3 - 7a\cdot(6a)^2 + 24a^2\cdot 6a + 740 = 108a^3 - 252a^3 + 144a^3 + 740 = 740$$

Zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums beträgt die Gesamtzuflussrate $740\,\frac{m^3}{h}$.

(2) Die Zuflussrate von Bach 2 ergibt sich als Differenz der Gesamtzuflussrate und der Zuflussrate von Bach 1:

$$g_a(t) = h_a(t) - f_a(t) = \frac{1}{4}\cdot t^3 - 4a\cdot t^2 + 15a^2\cdot t + 400$$

(3) Die Differenz der Zuflussraten der beiden Bäche wird gegeben durch
$d_a(t) = g_a(t) - f_a(t) = -a\cdot t^2 + 6a^2\cdot t + 60$

d_a stellt eine nach unten geöffnete Parabel dar. Deren Nullstellen erhält man durch:

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

$d_a(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 6a \cdot t - \frac{60}{a} = 0$

$\Leftrightarrow \quad t_1 = 3a - \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}} < 3a - \sqrt{9a^2} = 0 \ \left(\text{da } \frac{60}{a} > 0\right)$

$\vee \ t_2 = 3a + \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}} > 3a + \sqrt{9a^2} = 6a \ \left(\text{da } \frac{60}{a} > 0\right).$

F 2

Da die Nullstellen der nach unten geöffneten Parabel links bzw. rechts von den Intervallgrenzen 0 und $6a$ liegen, liegt die Parabel im Bereich $[0;6a]$ oberhalb der x-Achse, d.h. für $t \in [0;6a]$ gilt: $d_a(t) > 0 \Leftrightarrow g_a(t) > f_a(t)$.

(4) Es gilt $h_a'(t) = \frac{3}{2}t^2 - 14a \cdot t + 24a^2$ und $h_a''(t) = 3t - 14a$

F 20

Notwendige Bedingung für lokale Extrema: $h_a'(t) = 0$

$h_a'(t) = \frac{3}{2}t^2 - 14a \cdot t + 24a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - \frac{28}{3}a \cdot t + 16a^2 = 0$

F 2

$\Leftrightarrow \quad t = \frac{14}{3}a \pm \frac{\sqrt{52}}{3}a$

$\Leftrightarrow \quad t_m \approx 2{,}26a \ \vee \ \underset{\notin D}{(t \approx 7{,}07a)}$

Hinreichende Bedingung für relative Extrema: $h_a'(t) = 0 \ \wedge \ h_a''(t) \neq 0$

$h_a'(t_m) = 0 \ \wedge \ h_a''(2{,}26a) \approx 6{,}8a - 14a < 0$

$\Leftrightarrow \quad t_m \approx 2{,}26a$ ist lokale Maximalstelle von h_a.

$h_a(2{,}26a) = 24{,}26a^3 + 740$

$E(2{,}26a \mid 24{,}26a^3 + 740)$ ist das lokale Maximum.
Da die y-Koordinate dieses Maximums größer ist als die y-Werte von h_a an den Rändern des Definitionsbereiches (siehe a)(1)), ist das lokale Maximum sogar das globale Maximum von h_a.

F 21

(5) Es gilt $h_a(t_m) \approx h_a(2{,}26a) = \frac{1}{2} \cdot (2{,}26a)^3 - 7a \cdot (2{,}26a)^2 + 24a^2 \cdot 2{,}26a + 740$

$= 24{,}25838a^3 + 740$

Dieser Term soll gleich 3800 sein:
$24{,}25838a^3 + 740 = 3800 \quad \Leftrightarrow \quad a^3 \approx 126{,}142 \quad \Leftrightarrow \quad a \approx 5{,}015$

F 51

Der zum Maximum der Zuflussrate von 3800 $\frac{m^3}{h}$ gehörige Scharvertreter ist der mit dem Parameterwert $a \approx 5{,}0$.

b) (1) Es gilt $h_a''(t) = 3t - 14a$ und $h_a'''(t) = 3$

F 22

Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $h_a''(t) = 0$

$h_a''(t) = 3t - 14a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{14}{3}a$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $h_a''(t) = 0 \ \wedge \ h_a'''(t) \neq 0$

$h_a''\left(\frac{14}{3}a\right) = 0 \ \wedge \ h_a'''\left(\frac{14}{3}a\right) \neq 0$, d.h.

h_a hat die Wendestelle $t = \frac{14}{3}a$.

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

(2) Die Gesamtzuflussrate ändert sich am stärksten zum Zeitpunkt der Wendestelle oder an den Randstellen des Intervalls $[0;6a]$. **F 21**
Ein Vergleich der Steigungen

$$|h_a'(0)| = 24a^2 > \left|h_a'\left(\tfrac{14}{3}a\right)\right| = |-26a^2| = 8\tfrac{2}{3}a^2$$
$$> |h_a'(6a)| = |-6a^2| = 6a^2 \text{ ergibt:}$$

Die Gesamtzuflussrate ändert sich am stärksten zu Beginn des Beobachtungszeitraums.

(3) Die Gesamtzuflussrate nimmt am stärksten ab zum Zeitpunkt der Wendestelle oder an den Randstellen des Intervalls $[0;6a]$. **F 21**
Ein Vergleich der Steigungen

$$h_a'\left(\tfrac{14}{3}a\right) = -\tfrac{26}{3}a^2 < h_a'(6a) = -6a^2 < h_a'(0) = 24a^2 \text{ zeigt:}$$

Die Gesamtzuflussrate nimmt am stärksten zum Zeitpunkt der Wendestelle $t = \frac{14}{3}a$ ab.

c) (1) $\int_0^{24} h_4(t)\,dt = \left[\frac{1}{8}t^4 - \frac{28}{3}t^3 + 192t^2 + 740t\right]_0^{24} \overset{\text{GTR}}{=} 40\,800 > 20\,000$, d.h. **F 28**

Das Staubecken könnte die zugeflossene Wassermenge nicht aufnehmen.

(2) Die obere Integrationsgrenze stellt den Zeitpunkt dar, bis zu dem Wasser in das Staubecken hineinströmt, d.h. **F 28**

Die Lösung $b \approx 10{,}65$ der Gleichung $\int_0^b h_4(t)(dt)$ bezeichnet den Zeitpunkt, zu dem das Staubecken voll wäre.

(3) Da bis zum Zeitpunkt $t = 10$ kein Ablauf erfolgt, ist die Ablaufrate $0\,\frac{m^3}{h}$, d.h. bis zur Zeit $t = 10$ sind **F 28**

$\int_0^{10} h_4(t)\,dt = \left[\frac{1}{8}t^4 - \frac{28}{3}t^3 + 192t^2 + 740t\right]_0^{10} \overset{\text{GTR}}{=} 18\,516\tfrac{2}{3}\,m^3$ Wasser im Staubecken.

Ab $t = 10$ bis $t = 14$ läuft weiter Wasser mit der Zulaufrate $h_4(t)$ zu, gleichzeitig erfolgt aber ein konstanter Ablauf mit der Ablaufrate $2000\,\frac{m^3}{h}$, d.h. in diesem Zeitintervall kommen als Bilanz

$\int_{10}^{14} (h_4(t) - 2000)\,dt = \left[\frac{1}{8}t^4 - \frac{28}{3}t^3 + 192t^2 - 1280t\right]_{10}^{14} \overset{\text{GTR}}{=} 666\tfrac{2}{3}\,m^3$ Wasser hinzu.

Da nach dem Zeitpunkt $t = 14$ der Ablauf stärker als der Zulauf ist, liegt bei $t = 14$ die maximale Wassermenge im Staubecken vor.

Die maximale Wassermenge im Staubecken beträgt
$18\,516\tfrac{2}{3}\,m^3 + 666\tfrac{2}{3}\,m^3 = 19\,183\tfrac{1}{3}\,m^3$, das Becken läuft nicht über.

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Aufgabe B3

a) Es soll der Abstand des Punktes $B\left(\sqrt{2}\,|\,1\,|\,0\right)$ von der Geraden OD bestimmt werden. F 82

Bestimmung einer Gleichung der Geraden OD:

$g_{OD}:\ \vec{x} = \overrightarrow{OO} + r\cdot\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Ein beliebiger Punkt der Geraden OD ist daher von der Form: $P_r(r\,|\,r\,|\,0)$.

Für den Abstand von B zu $P_r(r\,|\,r\,|\,0)$ gilt:

$d(r) = \left|\overrightarrow{BP_r}\right| = \sqrt{\left(r-\sqrt{2}\right)^2 + (r-1)^2}$ (Zielfunktion).

Der GTR liefert für diese Funktion ein Minimum für $r = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten: $P\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\,\middle|\,\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\,\middle|\,0\right)$.

Der Abstand des Punktes B von der Geraden g_{OD} beträgt daher:

$$d\left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\right) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)-1\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2} = \sqrt{2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2}$$
$$= \sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = 1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}29\ [LE]$$

Der Abstand des Punktes B von der Geraden OD beträgt ca. 0,29 [LE].

b) (1) Die Ebene E enthält die Punkte A und A′ und ist senkrecht zur x_1x_2-Ebene. F 65

Sie wird daher aufgespannt von den Vektoren $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

und $\overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Eine Parametergleichung von E ist daher:

$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Bestimmung einer Koordinatengleichung der Ebene E: F 60
Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E erhält man z.B. mithilfe des Vektorproduktes:

$\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Hinweis: Es gibt GTR-Modelle, die das Vektorprodukt direkt berechnen können.
Somit lautet eine Koordinatengleichung von $H:\ x_1 + x_2 = d$
Führt man die Punktprobe für $A\left(\sqrt{2}\,|\,0\,|\,0\right)$ durch, so erhält man: $d = \sqrt{2}$.

Eine Koordinatengleichung von E lautet: $x_1 + x_2 = \sqrt{2}$.

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

(2) Bestimmung des Schnittpunktes S:
Ein beliebiger Punkt der Geraden g_{OD} ist daher gegeben durch:
$P_r(r\,|\,r\,|\,0)$ $(r \in \mathbb{R})$. F 70

Einsetzen in die Koordinatengleichung von E liefert:
$r + r = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$.

Durch Einsetzen in g_{OD} erhält man den Schnittpunkt $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,0\right)$.

c) (1) $g_{OD}\colon\ x = r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $(r \in \mathbb{R})$ und $E_k\colon\ x_1 - x_2 + k \cdot x_3 = 0,\ k \in \mathbb{R}$. F 91
Schnittproblem ansetzen: $r - r + k \cdot 0 = 0$.
Dies ist wahr für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{R}$,

also liegt die Gerade OD in jeder Ebene E_k.

(2) Die Ebene E steht senkrecht zu jeder Ebene E_k, $k \in \mathbb{R}$, wenn für die Normalenvektoren gilt: $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{E_k} = 0$. F 59

Da $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{E_k} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\k\end{pmatrix} = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$, gilt die Behauptung.

Die Ebene E ist also senkrecht zu jeder Ebene E_k, $k \in \mathbb{R}$.

(3) Nach c)(2) ist die Ebene E_k für alle $k \in \mathbb{R}$ senkrecht zur Ebene E.

Die Ebene E_k soll zusätzlich auch senkrecht auf der x_1x_2-Ebene stehen:

$\vec{n}_{E_k} \cdot \vec{n}_{x_1x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0.$ Also gilt: $E_0 = E^*$. F 59

Der gesuchte Wert des Parameters ist $k = 0$.

(4) Der Punkt A^* liegt senkrecht über dem Mittelpunkt S der Strecke $\overline{AA'}$.

Der Mittelpunkt S hat die Koordinaten: $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,0\right)$. F 56

Damit hat der Punkt A^* die Form: $A^*\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,a_3^*\right)$.

Da A^* wie auch A und A' auf dem Halbkreis um S liegt, gilt die Bedingung:

$\left|\overrightarrow{A^*S}\right| = \left|\overrightarrow{AS}\right|$. Damit lässt sich die fehlende Koordinate a_3^*, $a_3^* > 0$ berechnen: F 53

$$\left|\begin{pmatrix}0\\0\\a_3^*\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right| \quad \Leftrightarrow \quad a_3^* = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1.$$

Der Punkt A^* hat die Koordinaten $A^*\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,1\right)$.

d) (1) Der Punkt $A''(a_1''\,|\,a_2''\,|\,a_3'')$ hat die folgenden Eigenschaften:
(1) er liegt in der Ebene E, also $a_1'' + a_2'' = \sqrt{2}$
(2) er liegt in der zur x_1x_3-Ebene parallelen Ebene zu $x_2 = 1$, also: $a_2'' = 1$ F 66
(3) er hat vom Ursprung denselben Abstand wie der Punkt A,
also: $\left|\overrightarrow{OA''}\right| = \sqrt{2}$. F 80

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Aus (1) und (2) folgt: $a_1'' = \sqrt{2} - 1$ und aus (1) – (3):

$$\left|\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ a_3'' \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}-1)^2 + 1 + a_3''^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_3'' = \sqrt{2\sqrt{2}-2}.$$

Der Punkt A″ hat die Koordinaten $A''\left(\sqrt{2}-1 \,|\, 1 \,|\, \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$.

(2) Bestimmung der Seitenlängen des Dreiecks OCA″: F 53

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|\overrightarrow{OC}\right| = 1$ [LE],

$\left|\overrightarrow{OA''}\right| = \sqrt{2}$ [LE] vgl. d) (1)

$\overrightarrow{CA''} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ \sqrt{2\sqrt{2}-2} \end{pmatrix}$, $\left|\overrightarrow{CA''}\right| = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + 2\sqrt{2} - 2} = 1$ [LE]

Die Dreiecksseiten $\overline{OC}$ und $\overline{CA''}$ sind gleich lang.

Daher ist das Dreieck OCA″ gleichschenklig.

Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich Null, so stehen die Vektoren senkrecht aufeinander. F 59

Ein rechter Winkel kann in diesem Fall nur im Punkt C vorliegen, da die Dreiecksseiten $\overline{OC}$ und $\overline{CA''}$ gleich lang sind.

Es gilt: $\overline{OC} \cdot \overline{CA''} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ \sqrt{2\sqrt{2}-2} \end{pmatrix} = 0.$

Daher ist das Dreieck OCA″ rechtwinklig.

Aufgabe B4

a) Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der weiblichen Zuschauer. X ist binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0{,}25$.
Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden jeweils mithilfe der GTR-Befehle für die Einzelwahrscheinlichkeit bzw. kumulierte Wahrscheinlichkeit berechnet.

(1) $P(X = 48) = 0{,}06247\ldots \approx 0{,}0625$ F 101

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 48 Zuschauer weiblich sind, beträgt ca. 0,0625 (6,25 %).

(2) $P(35 \leqq X \leqq 60) = P(X \leqq 60) - P(X \leqq 34) = 0{,}95461\ldots - 0{,}00439\ldots \approx 0{,}9502$ F 101

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 35 und höchstens 60 Zuschauer weiblich sind, beträgt ca. 0,9502 (95,02 %).

Hinweis:
Es gibt GTR-Modelle, die die Wahrscheinlichkeit $P(35 \leqq X \leqq 60)$ direkt, das heißt ohne Differenzbildung, berechnen können.

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

(3) Für den Erwartungswert von X gilt $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}25 = 50$. **F 102**
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqq 40 \text{ oder } X \geqq 60)$.

$$P(X \leqq 40 \text{ oder } X \geqq 60) = P(X \leqq 40) + P(X \geqq 60) = P(X \leqq 40) + 1 - P(X \leqq 59)$$ **F 101**
$$= 0{,}05784\ldots + 1 - 0{,}93752\ldots \approx 0{,}1203$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der weiblichen Zuschauer um mehr als 10 von ihrem Erwartungswert abweicht, beträgt ca. 0,1203 (12,03 %).

Hinweis:
Es gibt GTR-Modelle, die die Wahrscheinlichkeit $P(41 \leqq X \leqq 59)$ direkt, das heißt ohne Differenzbildung, berechnen können.
Man erhält dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch $1 - P(41 \leqq X \leqq 59)$.

b) X ist binomialverteilt mit $n = 20\,000$ und $p = 0{,}25$.

(1) Für den Erwartungswert von X gilt $\mu = n \cdot p = 20\,000 \cdot 0{,}25 = 5000$. **F 102**
Ein symmetrisches Intervall um μ lautet $\mu - a \leqq X \leqq \mu + a$, also $5000 - a \leqq X \leqq 5000 + a$.
Es soll gelten: $P(5000 - a \leqq X \leqq 5000 + a) \geqq 0{,}9$
Es gilt: **F 101**
$P(5000 - a \leqq X \leqq 5000 + a) = P(X \leqq 5000 + a) - P(X \leqq 5000 - a - 1)$

Man berechnet mit dem GTR eine Wertetabelle für den Term $P(X \leqq 5000 + a) - P(X \leqq 4999 - a)$.
Dabei wählt man als Schrittweite zunächst z. B. 10. Anschließend verfeinert man die Wertetabelle und erhält somit den gesuchten Wert von a.

a	…	100	101	102	…
$P(X \leqq 5000 + a) - P(X \leqq 4999 - a)$	…	0,8992…	0,9025…	0,9058…	…

Somit ist die Bedingung für alle a, die größer als 100 sind, erfüllt.

Das kleinste Intervall, das die Bedingung erfüllt, ist das Intervall [4899; 5101].

Alternative Lösung:
Da n eine sehr große Zahl ist, kann man die Binomialverteilung sehr gut mithilfe einer geeigneten Normalverteilung annähern. Für die Standardabweichung der Binomialverteilung gilt:
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{20\,000 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{3750} \approx 61{,}24$. **F 102**
Da $\sigma > 3$ gilt, kann man näherungsweise die gegebene Binomialverteilung durch eine Normalverteilung mit $\mu = 5000$ und $\sigma = \sqrt{3750}$ ersetzen.
Die Grenze a findet man mithilfe des InvNormal-Befehls des GTR.

(I) Wenn der GTR über einen InvNormal-Befehl verfügt, der nur den sogenannten „left tail“ berechnen kann, dann muss man noch die Symmetrie der Glockenkurve ausnutzen. **F 112**

Aus $P(5000 - a \leqq X \leqq 5000 + a) = 0{,}9$ (Grenzfall) folgt

$P(5000 - a \leqq X) = \frac{1 - 0{,}9}{2} = 0{,}05$.

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Mit dem InvNormal-Befehl liefert der GTR als untere Grenze 4899,27…
Somit folgt, da die Intervallgrenze eine natürliche Zahl sein muss, dass die untere Intervallgrenze 4899 ist. Die obere Intervallgrenze folgt aus der Symmetrie: $5000 + (5000 - 4899) = 5101$.

F 112

(II) Wenn der GTR über einen InvNormal-Befehl verfügt, der auch den sogenannten „central tail" berechnen kann, dann erhält man die beiden Intervallgrenzen direkt mit dem GTR. Der GTR liefert:
untere Grenze $x_1 = 4899{,}27\ldots$; obere Grenze $x_2 = 5100{,}73\ldots$
Da die Intervallgrenzen natürliche Zahlen sein müssen, lautet das Intervall [4899; 5101].

(2) Man kann die Wahrscheinlichkeit mit dem gegebenen Term (Formel von Bernoulli) nur dann berechnen, wenn die Zufallsvariable X binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}25$ ist.
Damit dies erfüllt ist, muss für jede Person die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person weiblich ist, unabhängig von den anderen Personen in der Schlange sein. Diese Wahrscheinlichkeit muss für jede Person in dieser Schlange 0,25 betragen.
Diese Voraussetzung ist in der Praxis meist nicht erfüllt. Oft gehen Gruppen von Personen z. B. aus Vereinen (zum Beispiel aus einem Männergesangsverein) zusammen ins Stadion. Diese Gruppen stehen dann meist gemeinsam in der Schlange. Damit wäre die Unabhängigkeit nicht erfüllt.

c) (1) Für den Anteil der „Mädchen" gilt: $0{,}3178 \cdot 0{,}1584 \approx 0{,}0503$.

Der Anteil der „Mädchen" im DFB beträgt ca. 0,0503 (5,03 %).

(2) Anzahl der „Senioren" im DFB:
Da die Anzahl der weiblichen Mitglieder und deren Anteil bekannt sind, kann man die Anzahl aller Mitglieder im DFB bestimmen. Die Mitgliederzahlen sollten hierbei sinnvoll, z. B. auf Tausender, gerundet werden.

1077000 sind ca. 15,84 %. Somit folgt für die Anzahl aller Mitglieder:

$$\frac{1077000}{0{,}1584} \approx 6800000$$

Von diesen 6800000 Mitgliedern sind $6800000 - 1077000 = 5723000$ männlich.

Anzahl der Jugendlichen im DFB: $6800000 \cdot 0{,}3309 \approx 2250000$
Anzahl der „Mädchen" im DFB: $1077000 \cdot 0{,}3178 \approx 342000$
Anzahl der „Junioren" im DFB: $2250000 - 342000 = 1908000$
Anzahl der „Senioren" im DFB: $5723000 - 1908000 = 3815000$

Die Anzahl der Senioren im DFB beträgt ca. 3815000.

Anteil der „Senioren" im DFB

Für den Anteil der „Senioren" im DFB gilt: $\frac{3815000}{6800000} = 0{,}56102\ldots \approx 0{,}5610$

Der Anteil der „Senioren" im DFB beträgt ca. 0,5610 (56,10 %).

Hinweis:
Man kann auch zuerst den Anteil der „Senioren" aus den anderen gegebenen Anteilen berechnen und danach daraus die Anzahl der „Senioren" bestimmen.

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Erfahrungsgemäß fällt den meisten Menschen das Rechnen mit konkreten Anzahlen (hier natürliche Zahlen auf Tausender gerundet) leichter, als das Rechnen mit Anteilen.

(3) Wenn man zwei Personen auswählt, dann entspricht diese Auswahl im Urnenmodell einem Ziehen ohne Zurücklegen. Das heißt streng genommen sind die Wahrscheinlichkeiten im 2. Zug nicht exakt dieselben Wahrscheinlichkeiten wie im 1. Zug.
Da die Anzahlen hier jedoch sehr groß sind, kann man diese geringfügige Änderung der Wahrscheinlichkeiten in diesem Fall ohne Probleme vernachlässigen. Somit kann man die gegebenen und die in (2) berechneten Anteile als Wahrscheinlichkeiten für diese Auswahl interpretieren.

Die Wahrscheinlichkeit, einen „Junior" auszuwählen, beträgt ca.

$\frac{1\,908\,000}{6\,800\,000} = 0{,}28058\ldots \approx 0{,}2806.$

Die Wahrscheinlichkeit, einen „Senior" auszuwählen, beträgt nach (2) ca. 0,5610.

F 94

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet man mithilfe der Pfadregeln. Beachten Sie, dass es für das betrachtete Ereignis (es handelt sich um einen „Junior" und einen „Senior") zwei günstige Pfade gibt.
$2 \cdot 0{,}2806 \cdot 0{,}5610 = 0{,}31483\ldots \approx 0{,}3148$

F 96

Die Wahrscheinlichkeit, einen „Junior" und einen „Senior" auszuwählen, beträgt ca. 0,3148 (31,48 %).

d) (1) In diesem Fall führt man einen rechtsseitigen Signifikanztest durch.
Nullhypothese $H_0: p \leqq 0{,}25$; Gegenhypothese $H_1: p > 0{,}25$
Stichprobenumfang $n = 1000$; Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$
X ist die Anzahl der weiblichen Zuschauer in der Stichprobe.
Im Extremfall ist X binomialverteilt mit $n = 1000$ und $p = 0{,}25$.
Gesucht ist die kleinste Zahl g, für die gilt: $P(X \geqq g) \leqq 0{,}05$.
$P(X \geqq g) = 1 - P(X \leqq g - 1) \leqq 0{,}05$
Man erstellt mit dem GTR eine Wertetabelle für den Term $1 - P(X \leqq g - 1)$:

F 106

$g - 1$	…	272	273	274	…
$P(X \leqq g - 1)$	…	0,0511…	0,0440…	0,0378…	…

Es gilt $g - 1 = 273$ und somit $g = 274$.

Die Entscheidungsregel lautet: Wenn man in der Stichprobe mindestens 274 weibliche Zuschauer findet, dann wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

F 106

Die Nullhypothese H_0 geht davon aus, dass sich der Anteil der weiblichen Zuschauer nicht verändert hat. Der Verkaufsleiter will damit das Risiko, irrtümlicherweise auf seinen Vorräten sitzen zu bleiben, begrenzen. Durch die Wahl dieser Nullhypothese kann man dieses Risiko durch das vorgegebene Signifikanzniveau α auf maximal 5 % begrenzen. Das Signifikanzniveau begrenzt die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen. Einen Fehler 1. Art würde man bei dieser Nullhypothese begehen, falls man die Nullhypothese verwirft und somit vermutet, dass der Anteil der weiblichen Zuschauer sich erhöht hat.

Mein Abi-Coach Mathematik 2017 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6

Hinweise:
1. Falls der GTR über einen inversen Binomialbefehl verfügt, kann man die Ungleichung $1 - P(X \leqq g-1) \leqq 0{,}05$ umschreiben in $P(X \leqq g-1) \geqq 0{,}95$ und den Wert für $g-1$ mit diesem Befehl direkt bestimmen.
2. Es gibt GTR-Modelle, mit denen man eine Tabelle für die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqq g)$ berechnen lassen kann. Man kann also hier auf das Umschreiben mithilfe des Gegenereignisses verzichten.

(2) Einen Fehler 2. Art begeht man, wenn man aufgrund der Stichprobe die Nullhypothese H_0 nicht verwirft, obwohl sie in Wirklichkeit falsch ist. Wenn man also in dieser Stichprobe höchstens 273 weibliche Zuschauer findet, dann verwirft man die Nullhypothese nicht und geht davon aus, dass der Anteil der weiblichen Zuschauer sich nicht verändert hat und nach wie vor bei 0,25 liegt. F 106
In diesem Fall wäre der Verkaufsleiter auf den „weiblichen Ansturm" auf seine Imbissstände nicht vorbereitet und er könnte die Möglichkeit, einen großen Gewinn zu machen, nicht voll nutzen, da seine Vorräte nicht ausreichten, um die Nachfrage der weiblichen Zuschauer zu befriedigen.

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art geht man von dem tatsächlichen Anteil von 30 % aus. Dann ist X also binomialverteilt mit $n = 1000$ und $p = 0{,}3$. F 106

$P(X \leqq 273) = 0{,}03287\ldots \approx 0{,}0329$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art beträgt ca. 0,0329 (ca. 3,29 %).

(3) Die Zufallsvariable X kann im Grenzfall als binomialverteilt mit $n = 125$ und $p = 0{,}25$ angenommen werden. F 101
Eine falsche Entscheidung wird genau dann gefällt, wenn sich bei mindestens fünf der acht Helfer 34 oder mehr Frauen auf den 125 Fotos befinden. Zuerst berechnet man die Wahrscheinlichkeit p^*, dass dies bei einem der Helfer eintritt.
Es gilt: $p^* = P(X \geqq 34)$.
Sei die Zufallsvariable Y die Anzahl der Helfer, die 34 oder mehr Frauen auf den 125 Fotos finden. Y ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = p^*$.

Die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geqq 5)$ ist die maximale Wahrscheinlichkeit, dass man nach der genannten Regel eine falsche Entscheidung trifft.

Hinweis:
Es gilt $p^* \approx 0{,}3163$ und damit $P(Y \geqq 5) \approx 0{,}0716$ (7,16 %).

Mein Abi-Coach Mathematik 2018 Lambacher Schweizer Nordrhein-Westfalen Leistungskurs
ISBN-13: 978-3-12-736093-6