Abitur 2015

Aufgaben

Pflichtteil

Aufgabe 1

2 VP Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (4 + e^{3x})^5$. — Tipp 1

Aufgabe 2

2 VP Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} \left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx$. — Tipp 2

Aufgabe 3

3 VP Lösen Sie die Gleichung $(x^3 - 3x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$. — Tipp 3

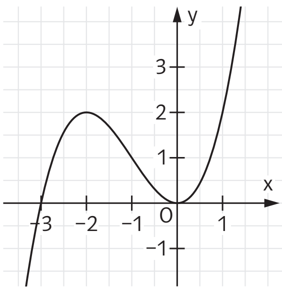
Aufgabe 4

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$.

4 VP Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f. — Tipp 4

Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer ganzrationalen Funktion f. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.



Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(1) Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.
(2) $f(-2) < f(-1)$
(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$
5 VP (4) Der Grad der Funktion f ist mindestens vier. — Tipp 5

Aufgabe 6

Gegeben sind die drei Punkte $A(4|0|4)$, $B(0|4|4)$ und $C(6|6|2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist. — Tipp 6

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzt. — Tipp 7
4 VP Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, wie viele solcher Punkte es gibt.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Ebene $E\colon\ 4x_1 + 3x_3 = 12$.

a) Stellen Sie E in einem Koordinatensystem dar. — Tipp 8

3 VP **b)** Bestimmen Sie alle Punkte der x_3-Achse, die von E den Abstand 3 haben. — Tipp 9

Aufgabe 8

Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

Rot: 20 %   Grün: 30 %   Blau: 50 %

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist. — Tipp 10

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
P(X = k)	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	…

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird. — Tipp 11

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. — Tipp 12

4 VP Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 9

Mit $V = \pi \int_0^4 \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Körpers berechnet.

3 VP Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und beschreiben Sie den Körper. — Tipp 13

Wahlteil **Analysis**

Aufgabe A 1

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4; \quad -5 \leqq x \leqq 5 \ \text{ (x und f(x) in Meter).}$$

a) Wie tief ist der Laderaum in der Mitte? Tipp 14
Wie breit ist er in 3 m Höhe? Tipp 15
In welchem Bereich hat der Boden des Laderaums eine Neigung unter 5 %? Tipp 16
5 VP Berechnen Sie das Volumen des Laderaums. Tipp 17

b) Zur Wartung steht der Lastkahn an Land auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Punkte $P_1(-4\,|\,f(-4))$ und $P_2(4\,|\,f(4))$ beschrieben werden.
3 VP In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform? Tipp 18

c) Der Laderaum kann durch eine horizontale Zwischendecke der Länge 50 m in zwei Teilräume geteilt werden. Das Volumen des unteren Teilraums beträgt 500 m³.
4 VP Berechnen Sie die Breite der Zwischendecke. Tipp 19

d) Untersuchen Sie, ob sich eine zylinderförmige Röhre mit Außendurchmesser 9,8 m so in Längsrichtung in den Laderaum legen lässt, dass sie ihn an der
3 VP tiefsten Stelle berührt. Tipp 20

Aufgabe A 2.1

Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.
Die Funktion g mit $g(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t}$ beschreibt die Geburtenrate und die Funktion s mit $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}$ beschreibt die Sterberate der Population (t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, g(t) und s(t) in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate. — Tipp 21
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten? — Tipp 22
4 VP Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat. — Tipp 23

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20 000 Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017. — Tipp 24
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand
3 VP von 1960? — Tipp 25

Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population. Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum in ausgewachsenem Zustand 0,8 m groß ist. Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe 0,5 m und seine momentane Wachstumsgeschwindigkeit 0,15 m pro Jahr.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. — Tipp 26
Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des
4 VP Individuums um 50 % zugenommen? — Tipp 27

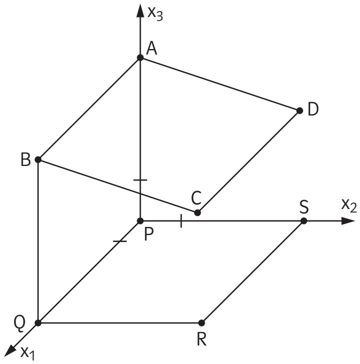
Aufgabe A 2.2

Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt O (0 | 0) und die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte des Kreises mit dem
4 VP Graphen von f in Abhängigkeit vom Kreisradius. — Tipp 28

Wahlteil **Analytische Geometrie / Stochastik**

Aufgabe B 1.1

Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte P(0|0|0), Q(5|0|0), R(5|4|0), S(0|4|0) die Eckpunkte der Terrasse dar. Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten A(0|0|4), B(5|0|4), C(5|3,9|2,7), D(0|3,9|2,7) beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3-Ebene beschrieben.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt. — Tipp 29
3 VP Berechnen Sie den Winkel zwischen Markise und Hauswand. — Tipp 30

b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine 30 cm hohe Stablampe.
Am Markisenrand CD wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um CD.
Kann der Regenschutz dabei die Stablampe berühren? — Tipp 31
Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stablampe auf der Terrasse
4 VP höchstens haben, damit dies nicht passiert? — Tipp 32

c) Die Sonne scheint und der Regenschutz wird entfernt.
Die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird. — Tipp 33
Die Markise kann ein- und ausgefahren werden. Dabei bewegen sich die äußeren Eckpunkte der Markise längs der Geraden BC und AD. Die Markise wird nun so weit eingefahren, dass der Terrassenrand zwischen Q und R genau zur Hälfte im Schatten liegt.
4 VP Bestimmen Sie die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise. — Tipp 34

Aufgabe B 1.2

Ein Großhändler gibt an, dass sein Weizensaatgut eine Keimfähigkeit von mindestens 80 % hat. Mehrere Kunden vermuten, dass die Keimfähigkeit in Wirklichkeit kleiner ist.
Deswegen wird die Aussage des Großhändlers mithilfe eines Tests auf einem Signifikanzniveau von 10 % überprüft, indem 500 Weizenkörner untersucht werden. Als Nullhypothese wird die Angabe des Großhändlers verwendet.

Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten. — Tipp 35

Die tatsächliche Keimfähigkeit des Saatguts beträgt 82 %.
Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei obigem Test
4 VP die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird? — Tipp 36

Aufgabe B 2.1

Gegeben sind die Ebene $E: 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16$ und eine Geradenschar durch

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_4 mit der Ebene E. Tipp 37
3 VP Welche Gerade der Schar ist orthogonal zu g_4? Tipp 38

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E. Tipp 39
Für welche Werte von a mit $-10 \leqq a \leqq 10$ hat der Schnittwinkel von g_a
3 VP und E die Weite 10°? Tipp 40

c) Begründen Sie, dass alle Geraden g_a in der Ebene $F: x_3 = 1$ liegen.
Es gibt eine Gerade h, die durch den Punkt $P(5|1|1)$ geht und in F liegt, aber nicht zur Schar gehört. Tipp 41
3 VP Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h. Tipp 42

Aufgabe B 2.2

Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine 2,5 km lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine 200 m lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit 88 % und liegend mit 93 % Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet stehend bei
1 VP fünf Schüssen genau vier Mal trifft. Tipp 43

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten
3 VP Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss. Tipp 44

c) Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern und künftig mit über 95 % Wahrscheinlichkeit bei fünf Schüssen mindestens vier Mal treffen.
2 VP Welche Trefferwahrscheinlichkeit muss er dafür mindestens erreichen? Tipp 45

Tipps

Folgende Tipps geben eine erste Hilfestellung:

Tipp 1	Die Funktion ist die Verkettung einer Potenzfunktion und einer Exponentialfunktion.
Tipp 2	Bestimmen Sie Stammfunktionsterme der einzelnen Summanden.
Tipp 3	Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist.
Tipp 4	Machen Sie einen allgemeinen Ansatz für die Funktionsgleichung und entnehmen Sie dem Aufgabentext die Bedingungen für f und f′.
Tipp 5	(1) Beachten Sie, dass von einem Tiefpunkt und nicht nur von einem Extrempunkt die Rede ist. (2) Der Graph von f′ macht auch Aussagen über die Monotonie des Graphen von f. (3) Die beiden Werte $f''(-2)$ und $f'(-2)$ können Sie der Abbildung entnehmen. (4) Entnehmen Sie die Mindestzahl von Extremstellen dem Graphen von f′.
Tipp 6	Wenn ein Dreieck wenigstens zwei gleich lange Seiten hat, dann ist es gleichschenklig.
Tipp 7	Fertigen Sie eine Skizze eines Dreiecks an und ergänzen Sie es zu einem Parallelogramm.
Tipp 8	Bestimmen Sie Spurpunkte.
Tipp 9	Verwenden Sie die Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung.
Tipp 10	Woran erkennen Sie, dass eine Zufallsvariable binomialverteilt ist?
Tipp 11	Sie können mit den Tabellenwerten die Wahrscheinlichkeit nicht direkt berechnen.
Tipp 12	Wie berechnet man den Erwartungswert E(X) bei einer Binomialverteilung?
Tipp 13	Beachten Sie, dass die Formel allgemein $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ heißt.
Tipp 14	Skizzieren Sie zuerst den Graphen mit dem GTR.
Tipp 15	Zeichnen Sie die Decke des Laderaums in 3 Meter Höhe ein. Beachten Sie die Symmetrie.
Tipp 16	Neigung 5 % heißt Steigung 0,05.
Tipp 17	Die Querschnittsfläche des Laderaums können Sie berechnen.
Tipp 18	Die Steigungen der zur Bordwand orthogonalen Geraden können Sie berechnen.
Tipp 19	Wie groß muss die Querschnittsfläche des unteren Teilraums sein?
Tipp 20	Nehmen Sie an, die Röhre würde den Laderaum im tiefsten Punkt berühren. Welche Koordinaten hat dann der Mittelpunkt der kreisförmigen Querschnittsfläche?
Tipp 21	Beachten Sie, dass die Funktion für die Sterberate gegeben ist.
Tipp 22	Untersuchen Sie die Differenzfunktion aus Geburten- und Sterberate.
Tipp 23	Die Population nimmt zu, solange die Geburtenrate größer ist als die Sterberate.
Tipp 24	Wie erhalten Sie aus der Änderungsrate des Bestands über einen gewissen Zeitraum den Bestand selbst?

Tipp 25	Wie groß ist die Bestandsänderung im gesuchten Zeitraum?
Tipp 26	Gehen Sie von der Funktionsgleichung $f(t) = S - a \cdot e^{-b \cdot t}$ für das beschränkte Wachstum aus und bestimmen Sie die drei Parameterwerte.
Tipp 27	Welche Größe hat das Individuum nach dem gesuchten Zeitraum?
Tipp 28	Zeichnen Sie den Graphen von f und einige Kreise um den Koordinatenursprung.
Tipp 29	Die Ebene E wird beispielsweise durch die drei Punkte A, B und D eindeutig festgelegt.
Tipp 30	Bestimmen Sie einen Normalenvektor der x_1x_3-Ebene und einen Normalenvektor der Ebene E, in der die Markise liegt.
Tipp 31	Wie lauten die Koordinaten des höchsten Punktes L der Stablampe?
Tipp 32	Verschieben Sie die Stablampe auf der Geraden (QR).
Tipp 33	Machen Sie sich anhand der Skizze klar, aus welcher Richtung das Sonnenlicht kommt.
Tipp 34	Der Mittelpunkt M der Strecke QR und der Mittelpunkt M^* von PS liegen auf der Schattengrenze.
Tipp 35	Es handelt sich um einen linksseitigen Signifikanztest.
Tipp 36	Bei wie vielen keimenden Weizenkörnern wird die Nullhypothese H_0 verworfen?
Tipp 37	Setzen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ der Parameterdarstellung von g_4 in die Gleichung von E ein.
Tipp 38	Welche Bedingung muss der Richtungsvektor von g_a erfüllen, damit g_a orthogonal zu g_4 ist?
Tipp 39	Bestimmen Sie einen Normalenvektor von E.
Tipp 40	Wie lautet eine Formel zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen g_a und E?
Tipp 41	Betrachten Sie die Koordinaten der Punkte, die auf g_a liegen.
Tipp 42	Überlegen Sie, wie der Richtungsvektor von h aussehen muss.
Tipp 43	Es liegt eine Binomialverteilung vor.
Tipp 44	Hier finden zwei binomialverteilte Zufallsexperimente hintereinander statt.
Tipp 45	Jetzt liegt eine $B_{5;p}$-Verteilung vor.

Folgende Tipps geben eine weitere Hilfestellung:

Tipp 1	Sie benötigen die Kettenregel zweimal.
Tipp 2	Denken Sie an die „Umkehrung der Kettenregel“. Machen Sie eine Probe durch Ableiten der Stammfunktion, ehe Sie das Integral berechnen.
Tipp 3	Klammern Sie x aus und betrachten Sie die drei Faktoren.

Tipp 4	Beachten Sie, dass der Berührpunkt der Tangente sowohl auf der Tangente als auch auf dem Graphen liegt.
Tipp 5	(1) Beachten Sie den Vorzeichenwechsel bei f' beim Überschreiten der Stelle -3. (2) Welches Monotonieverhalten liegt im Intervall $[-2;-1]$ vor? (3) Welchen Wert hat $f'(-2)$? Welche Bedeutung hat f'' für den Graphen von f'? (4) Wenn der Graph von f' mindestens zwei Extremstellen hat, dann hat die Gleichung $f''(x) = 0$ mindestens zwei Lösungen. Was bedeutet dies für den Grad von f''?
Tipp 6	Berechnen Sie die drei Seitenlängen.
Tipp 7	Zwei zueinander parallele Parallelogrammseiten lassen sich durch denselben Vektor beschreiben.
Tipp 8	Wenn es keinen Schnittpunkt einer Ebene mit einer Koordinatenachse gibt, dann sind Ebene und Achse parallel zueinander. Bestimmen Sie die Achsenabschnittsform und lesen Sie die Spurpunkte ab.
Tipp 9	Der noch unbekannte Punkt auf der x_3-Achse kann mit $P(0\,|\,0\,|\,u)$ bezeichnet werden. Bestimmen Sie seinen Abstand von der Ebene E zunächst in Abhängigkeit von u.
Tipp 10	Beachten Sie, dass es bei dieser Fragestellung unerheblich ist, ob „Grün“ oder „Blau“ angezeigt wird.
Tipp 11	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mithilfe des Gegenereignisses.
Tipp 12	Was können Sie über $P(X = E(X))$ aussagen, falls $E(X)$ ganzzahlig ist?
Tipp 13	Skizzieren Sie zunächst in einem Koordinatensystem die Fläche, die beim Rotieren um die x-Achse den gesuchten Körper erzeugt.
Tipp 14	Bestimmen Sie die y-Koordinaten des höchsten und des tiefsten Punkts des Laderaums (GTR).
Tipp 15	Die Laderaumdecke trifft auf die Bordwand in einem Punkt $P(x_P\,|\,3)$. Berechnen Sie x_P (GTR).
Tipp 16	Die Steigung in einem Punkt eines Graphen ist die Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt (GTR).
Tipp 17	Beachten Sie, dass der Laderaum die Form eines senkrechten Prismas hat.
Tipp 18	Im Modell liegen die Endpunkte der Stützen auf der x-Achse (GTR).
Tipp 19	Diese Querschnittsfläche liegt zwischen zwei Graphen. Einer der noch unbekannten Schnittpunkte der beiden Graphen sei $R_1(u\,|\,f(u))$. Dies liefert eine Bedingung für u (GTR).
Tipp 20	Den Abstand vom Kreismittelpunkt M zu einem beliebigen Punkt $T(u\,|\,f(u))$ des Graphen können Sie in Abhängigkeit von u angeben.
Tipp 21	Die Sterberate ist durch $s(t)$ beschrieben. Bestimmen Sie den kleinsten Funktionswert (GTR).
Tipp 22	Bestimmen Sie das Maximum der Funktionswerte der Differenzfunktion (GTR).
Tipp 23	Berechnen Sie die Nullstellen der Differenzfunktion (GTR).

Tipp 24	Beachten Sie, dass zu Beobachtungsbeginn bereits Individuen vorhanden waren und dann in den folgenden 57 Jahren weitere dazugekommen sind (GTR).
Tipp 25	Gesucht ist die obere Grenze eines Integrals, das den Wert 0 hat (GTR).
Tipp 26	Dem Aufgabentext können Sie die Sättigungsgrenze S und den Anfangsbestand f(0) unmittelbar entnehmen. Mithilfe der Ableitungsfunktion f′ erhalten Sie den dritten Parameterwert.
Tipp 27	Sie suchen denjenigen Wert von t, für den der Funktionswert 0,75 ist (GTR).
Tipp 28	Einer dieser Kreise hat zwei Berührpunkte mit dem Graphen. Den Radius dieses Kreises können Sie ermitteln (GTR).
Tipp 29	Ein Normalenvektor der Ebene muss auf den Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ senkrecht stehen.
Tipp 30	Ein Normalenvektor von E ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor der x_1x_3-Ebene ist $\overrightarrow{n_{13}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Tipp 31	Der Punkt L(5 | 2 | 0,3) ist der höchste Punkt der Stablampe. Berechnen Sie den Abstand des Punktes L von C.
Tipp 32	L_u sei der höchste Punkt der verschobenen Stablampe. Welche Koordinaten von L_u können Sie angeben?
Tipp 33	Das Sonnenlicht kommt von schräg oben, wobei die x_2-Koordinate negativ ist.
Tipp 34	Die Punkte M und M* und der Vektor $\vec{v}$ legen eine Ebene F (Lichtebene) fest. Die neue Markisenkante C′D′ muss in F liegen.
Tipp 35	Im Extremfall liegt eine $B_{500;\,0,8}$-Verteilung vor. Welche Ungleichung ergibt sich aufgrund des Signifikanzniveaus?
Tipp 36	Es liegt eine $B_{500;\,0,82}$-Verteilung vor.
Tipp 37	Sie erhalten eine Gleichung mit der Variablen t. Lösen Sie diese Gleichung.
Tipp 38	Der Richtungsvektor von g_a muss orthogonal zum Richtungsvektor von g_4 sein. Das Skalarprodukt von zwei zueinander orthogonalen Vektoren ergibt immer null.
Tipp 39	Ein Normalenvektor von E ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, der Richtungsvektor von g_4 ist $\overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Tipp 40	Für den Winkel gilt: $\sin(\alpha) = \frac{\lvert \overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{u_a} \rvert}{\lvert \overrightarrow{n_E} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{u_a} \rvert}$
Tipp 41	Alle Punkte, die auf g_a liegen, haben die gleiche x_3-Koordinate.
Tipp 42	Da h in F liegt, muss die x_3-Komponente des Richtungsvektors von h null sein.
Tipp 43	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}88$ (GTR).
Tipp 44	Zeichnen Sie den relevanten Teil eines Baumdiagramms für 4 bzw. 5 Treffer.
Tipp 45	Übersetzen Sie den Aufgabentext in eine geeignete Ungleichung.

Folgende Tipps helfen, Lücken zu schließen:

Tipp 1	Bearbeiten Sie aus F 13 das Beispiel a), aus F 16 die Beispiele a) und c) und die Aufgabe d), aus F 17 das Beispiel a) und die Aufgaben a) und b).
Tipp 2	Bearbeiten Sie aus F 41 das Beispiel 2 und die Aufgabe 3, aus F 43 das Beispiel 3 d) und die Aufgabe 2 e).
Tipp 3	Bearbeiten Sie aus F 2 das Beispiel d) und die Aufgabe e) und aus F 6 das Beispiel 1 und die Aufgabe a).
Tipp 4	Aus den vier Bedingungen erhalten Sie ein Gleichungssystem. Lösen Sie dieses Gleichungssystem F 9 . Bearbeiten Sie aus F 61 die Beispiele 1 und 3 und die Aufgabe 2.
Tipp 5	(1) Bearbeiten Sie aus F 78 das Beispiel 1 a). (2) Bearbeiten Sie aus F 78 das Beispiel 1 b). (3) $f''(-2)$ gibt die Tangentensteigung an den Graphen von f' an der Stelle -2 an. (4) Der Grad von f'' ist also mindestens 2. Was folgt daraus für den Grad von f' und den Grad von f?
Tipp 6	Bearbeiten Sie aus F 161 das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 7	Bearbeiten Sie aus F 106 das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 8	Bearbeiten Sie aus F 126 das Beispiel 2 und die Aufgabe 2.
Tipp 9	Bearbeiten Sie aus F 162 das Beispiel 2 und die Aufgabe 1. Lösen Sie die Betragsgleichung $\frac{\lvert 3\cdot u-12\rvert}{5}=3$. Bearbeiten Sie aus F 7 das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 10	Das Drehen eines Glücksrads entspricht dem Ziehen mit Zurücklegen.
Tipp 11	Bearbeiten Sie aus F 231 das Beispiel 3. Die erforderlichen Werte können Sie jetzt der Tabelle entnehmen.
Tipp 12	$P(X=E(X))$ ist für ganzzahliges $E(X)$ die größte vorkommende Wahrscheinlichkeit.
Tipp 13	Bearbeiten Sie aus F 55 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 a). Zeichnen Sie.
Tipp 14	Die Tiefe des Laderaums ergibt sich durch $f(5)-f(0)$.
Tipp 15	Die Gesamtbreite des Laderaums wird durch $2\cdot x_P$ beschrieben.
Tipp 16	Lösen Sie die Gleichung $f'(x)=0{,}05$ (GTR).
Tipp 17	Bearbeiten Sie aus F 52 das Beispiel 1 und die Aufgaben 1 a) und 2 a).
Tipp 18	Bearbeiten Sie aus F 23 das Beispiel und die Aufgabe 1 a).
Tipp 19	Bearbeiten Sie aus F 51 das Beispiel 3 und die Aufgabe 4 b). Lösen Sie die Integralgleichung $\int_0^u \left(\frac{1}{125}u^4-f(x)\right)dx=5$. (CASIO) Lösen Sie die Gleichung im RUN-Menü mithilfe des Befehls SolvN. Beachten Sie dabei, dass u als Variable definiert werden muss. (TI) Bestimmen Sie die Schnittstelle des Graphen der Funktion g mit $g(x)=x\cdot f(x)-\int_0^x f(x)\,dx$ und der Geraden mit der Gleichung $y=5$.

Tipp 20	Vergleichen Sie das Minimum der Funktionswerte mit dem Radius des Zylinders.
Tipp 21	Das Minimum der Sterberate ist der y-Wert des Tiefpunkts des Graphen von s.
Tipp 22	Der gesuchte Zeitpunkt ist der x-Wert des Hochpunkts des Graphen der Differenzfunktion.
Tipp 23	Betrachten Sie den Graphen zwischen den berechneten Lösungen.
Tipp 24	Bearbeiten Sie aus **F 82** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 25	Lösen Sie die Integralgleichung $\int_0^u (g(t) - s(t))\,dt = 0$. (CASIO) Verwenden Sie im RUN-Menü den Befehl SolvN, um die Gleichung zu lösen. (TI) Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \int_0^x (g(t) - s(t))\,dt$.
Tipp 26	Bearbeiten Sie aus **F 84** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 27	(CASIO) Lösen Sie die Gleichung $0{,}8 - 0{,}3e^{-0{,}5t} = 0{,}75$ im RUN-Menü mithilfe des Befehls SolvN. (TI) Bestimmen Sie die Schnittstelle des Graphen der Funktion h mit $h(t) = 0{,}8 - 0{,}3e^{-0{,}5t}$ und der Geraden mit der Gleichung $y = 0{,}75$.
Tipp 28	Bearbeiten Sie aus **F 33** das Beispiel 2. Für welche Kreisradien gibt es 0, 2, 3 oder 4 gemeinsame Punkte mit dem Graphen?
Tipp 29	Bearbeiten Sie aus **F 125** das Beispiel 2 und Aufgabe 1 oder 2.
Tipp 30	Bearbeiten Sie aus **F 153 a** das Beispiel und Aufgabe 1.
Tipp 31	Bearbeiten Sie aus **F 161** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 32	Der Punkt $L_u(5\,\|\,u\,\|\,0{,}3)$ ist der höchste Punkt der verschobenen Stablampe. Der Abstand des Punktes L_u von C muss kleiner als 2,7 m sein. Bearbeiten Sie aus **F 161** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 33	Die x_2-Koordinate des Schattenpunkts C^* von C auf der Terrasse ist demnach kleiner als 3,9 (x_2-Koordinate von C). Die x_2-Koordinate von R ist aber 4.
Tipp 34	Der neue Eckpunkt C′ liegt in der Ebene F, in der Ebene E, die die Markise enthält, und hat die x_1-Koordinate 5, also liegt C′ in der Ebene $x_1 = 5$. Sie erhalten C′ als Schnittpunkt der drei Ebenen.
Tipp 35	Bearbeiten Sie aus **F 241** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1 a).
Tipp 36	Bearbeiten Sie aus **F 241** das Beispiel 1 a) und die Aufgabe 1 b).
Tipp 37	Bearbeiten Sie aus **F 133 a** das Beispiel und die Aufgabe 1 a).
Tipp 38	Bearbeiten Sie aus **F 108** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 39	Bearbeiten Sie aus **F 154** das Beispiel 1 oder 2 und die Aufgabe 1 oder 2.
Tipp 40	(CASIO) Lösen Sie die Betragsgleichung $\sin(10°) = \frac{\lvert \vec{n_E} \cdot \vec{u_a} \rvert}{\lvert \vec{n_E} \rvert \cdot \lvert \vec{u_a} \rvert} = \frac{\lvert 3a+6 \rvert}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{a^2+1}}$ im RUN-Menü mithilfe des Befehls SolvN. (TI) Bestimmen Sie die Schnittstellen des Graphen der Funktion d mit $d(x) = \frac{\lvert 3x+6 \rvert}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{x^2+1}}$ und der Geraden mit der Gleichung $y = \sin(10°)$.

Tipp 41	Alle Punkte, die auf g_a liegen, haben die x_3-Koordinate 1. Daher liegen alle Geraden g_a in der Ebene F.
Tipp 42	Der Richtungsvektor von h darf kein Vielfaches des Vektors $\vec{u_a} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein.
Tipp 43	Bearbeiten Sie aus **F 231** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 a).
Tipp 44	Der Athlet muss höchstens eine Strafrunde laufen, falls er 1. zehnmal trifft 2. fünfmal liegend und viermal stehend trifft 3. viermal liegend und fünfmal stehend trifft.
Tipp 45	Bearbeiten Sie aus **F 233** das Beispiel 1 und die Aufgabe 2.

Lösungen

Pflichtteil

Aufgabe 1

F 11
F 13
F 16

Mit Potenzregel, Summenregel und zweimaliger Anwendung der Kettenregel folgt aus $f(x) = (4+e^{3x})^5$:

$f'(x) = 5\cdot(4+e^{3x})^4\cdot e^{3x}\cdot 3 = 15\cdot(4+e^{3x})^4\cdot e^{3x}$

Aufgabe 2

F 41
F 43

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(4x-\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)dx &= \left[2x^2-\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)\right]_0^{\pi}\\ &= \left[2x^2+2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right]_0^{\pi}\\ &= \left(2\pi^2+2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\right)-(0+2\cdot\cos(0))\\ &= (2\pi^2+0)-(0+2\cdot 1)\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi}\left(4x-\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)dx = 2\pi^2-2$$

Aufgabe 3

F 2
F 6

$$\begin{aligned}&(x^3-3x)\cdot(e^{2x}-5)=0\\ &x\cdot(x^2-3)\cdot(e^{2x}-5)=0\\ &x=0 \quad\text{oder}\quad x^2-3=0 \quad\text{oder}\quad e^{2x}-5=0\\ &x_1=0; \quad x^2=3 \quad\text{oder}\quad e^{2x}=5\\ &x_2=-\sqrt{3};\; x_3=\sqrt{3} \quad\text{oder}\quad 2x=\ln(5)\\ &x_4=\tfrac{1}{2}\cdot\ln(5)\end{aligned}$$

Die Gleichung hat die vier Lösungen $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{3}$; $x_4 = \frac{1}{2}\cdot\ln(5)$.

Alternativer Lösungsweg für die Gleichung $e^{2x} = 5$:
$e^{2x} = (e^x)^2 = 5$; $e^x = \pm\sqrt{5}$; $x_4 = \ln(\sqrt{5})$

Aufgabe 4

F 61
F 9

Es gilt: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$

Der Koordinatenursprung $O(0\,|\,0)$ liegt auf dem Graphen von f, d.h.: $f(0) = 0$
(I) $d = 0$
Der Koordinatenursprung $O(0\,|\,0)$ ist Extrempunkt, d.h.: $f'(0) = 0$
(II) $c = 0$
Die Steigung im Berührpunkt $B(2\,|\,y_B)$ der Tangente an den Graphen ist 4, d.h.: $f'(2) = 4$
(III) $12a+4b = 4$
Der Berührpunkt $B(2\,|\,y_B)$ liegt auf der Tangente, d.h.: $y_B = 4\cdot 2-12 = -4 = f(2)$
(IV) $8a+4b = -4$

Subtraktion der Gleichung (IV) von (III) ergibt $4a = 8$, also $a = 2$.
Mit (IV) folgt $8 \cdot 2 + 4b = -4$ und damit $b = -5$.

Die Funktionsgleichung ist $f(x) = 2x^3 - 5x^2$.

Aufgabe 5

(1) Die Aussage ist wahr.
Begründung: Die Ableitungsfunktion f′ hat an der Stelle $x_1 = -3$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel. Für $x < x_1$ nimmt $f'(x)$ negative Werte an und der Graph von f fällt. Für $x > x_1$ nimmt $f'(x)$ positive Werte an und der Graph von f steigt. Der Punkt $T(-3\,|\,y_T)$ ist daher ein Tiefpunkt des Graphen von f.

(2) Die Aussage ist wahr.
Begründung: Für $-2 < x < -1$ gilt: $f'(x) > 0$. Folglich ist f in diesem Intervall streng monoton wachsend. Damit ergibt sich: $f(-2) < f(-1)$.

(3) Die Aussage ist falsch.
Begründung: Den Funktionswert $f'(-2)$ entnimmt man dem Graphen von f′: $f'(-2) = 2$. Die Tangente an den Graphen von f′ im Punkt $H(-2\,|\,2)$ hat die Steigung 0, d.h.: $f''(-2) = 0$.
Daraus folgt: $f''(-2) + f'(-2) = 0 + 2 > 1$

(4) Die Aussage ist wahr.
Begründung: Der Graph von f′ der ganzrationalen Funktion f hat mindestens zwei Extremstellen. Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat also mindestens zwei Lösungen und f″ ist daher mindestens vom Grad 2. Dies ist nur möglich, wenn der Grad von f′ mindestens 3 ist und demzufolge der Grad von f mindestens 4.

F 78
F 30
F 32
F 21

Aufgabe 6

a) Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Die Seiten AC und BC sind gleich lang, das Dreieck ist demzufolge gleichschenklig.

F 101
F 102

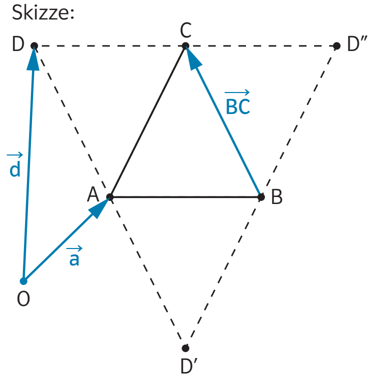
b) Die Skizze zeigt, dass es drei Möglichkeiten der Parallelogrammergänzung gibt. Man erhält z.B.:

$$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein möglicher vierter Parallelogrammpunkt ist $D(10\,|\,2\,|\,2)$.

Bemerkung:
Die anderen möglichen Lösungen sind bei nebenstehenden Bezeichnungen $D'(-2\,|\,-2\,|\,6)$ oder $D''(2\,|\,10\,|\,2)$.

Skizze:



F 106

Aufgabe 7

F 126

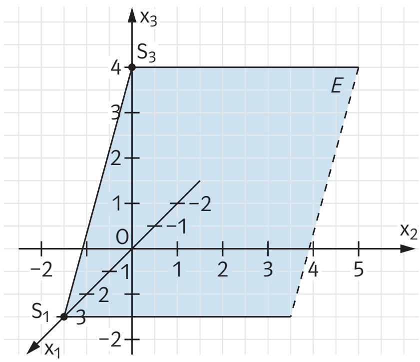
a) Darstellung der Ebene $E\colon\ 4x_1 + 3x_3 = 12$

Die Achsenabschnittsform lautet

$\frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{4} = 1.$

Die Spurpunkte sind demnach $S_1(3\,|\,0\,|\,0)$ und $S_3(0\,|\,0\,|\,4)$.

Die Ebene ist parallel zur x_2-Achse.



F 162
F 7

b) Gleichung von E in der Hesse'schen Normalenform

$$\frac{4x_1 + 3x_3 - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0$$

Ein beliebiger Punkt auf der x_3-Achse sei $P(0\,|\,0\,|\,u)$.

Dann lautet die Abstandsbedingung:

$$\frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot u - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 3$$

$$\frac{|3 \cdot u - 12|}{5} = 3$$

Daraus folgt:

$3u - 12 = 15$ oder $3u - 12 = -15$

$u_1 = 9$ oder $u_2 = -1$

Die gesuchten Punkte sind demnach $P_1(0\,|\,0\,|\,9)$ und $P_2(0\,|\,0\,|\,-1)$.

Aufgabe 8

a) Bei der Berechnung interessiert nur, ob „Rot" oder „Nicht-Rot" angezeigt wird. Es gibt daher nur die beiden Ausgänge „Rot" (Treffer) oder „Nicht-Rot" (Nicht-Treffer). Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer ist immer dieselbe, nämlich $p(\text{Rot}) = 0{,}2$. Folglich ist die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Treffer (eine natürliche Zahl) beschreibt, binomialverteilt.

F 231

b) Das Ereignis „Es erscheint mindestens dreimal Rot" ist das Gegenereignis zu „Es erscheint höchstens zweimal Rot". Daher gilt:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$
$$= 1 - (0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}14) = 0{,}79$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird, beträgt 0,79.

c) Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird für $k = 4$ angegeben. Für den Erwartungswert gilt demzufolge $3 < E(X) < 5$.

Wegen $E(X) = n \cdot p(\text{Rot}) = 20 \cdot 0{,}2 = 4$, $E(X) = n \cdot p(\text{Rot}) = 25 \cdot 0{,}2 = 5$ und $E(X) = n \cdot p(\text{Rot}) = 30 \cdot 0{,}2 = 6$ folgt daraus $n = 20$.

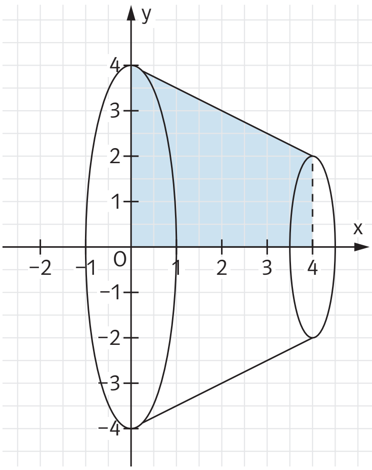
Der Tabelle kann nur der Wert $n = 20$ zugrunde liegen.

Aufgabe 9

F 55

Das Integral beschreibt die Maßzahl des Volumens eines Rotationskörpers, der bei Rotation der Fläche zwischen der Geraden mit der Gleichung $y = 4 - \frac{1}{2}x$, der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = 4$ entsteht.

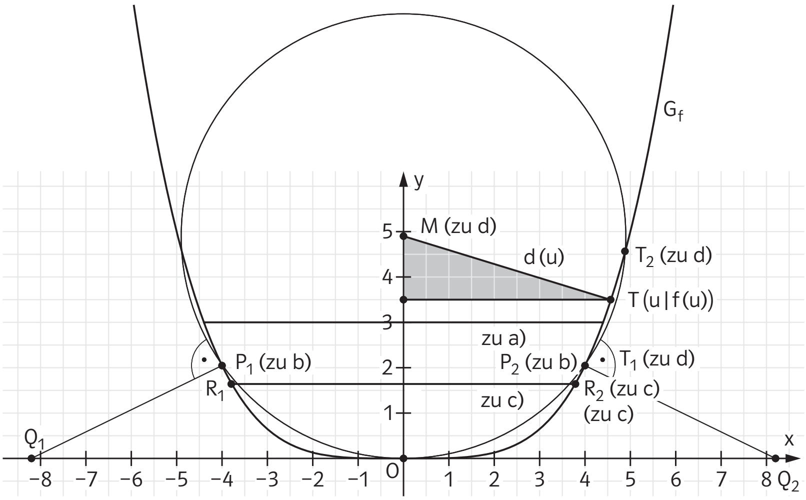
Dieser Körper ist ein Kegelstumpf mit den Grundkreisradien 4 bzw. 2 Längeneinheiten und der Höhe 4 Längeneinheiten.



Wahlteil **Analysis**

Aufgabe A 1

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Sachverhalte für alle Teilaufgaben.



a) Tiefe des Laderaums in der Mitte:

Es gilt: $f(0) = 0,\ f(5) = \frac{1}{125} \cdot 5^4 = 5$

Der tiefste Punkt hat den x-Wert 0. Der höchste Punkt der Bordwand hat den x-Wert 5 (bzw. −5).

Die Tiefe des Laderaums beträgt somit 5 Meter.

F 4

Breite des Laderaums in 3 m Höhe:
Bedingung: $f(x) = 3$

Die Gleichung $\frac{1}{125} \cdot x^4 = 3$ hat die Lösung $x_1 = 4{,}400\ldots$ und wegen der Symmetrie zur y-Achse auch $x_2 = -4{,}400\ldots$ (▦)

In 3 Meter Höhe beträgt die Breite des Laderaums etwa 8,80 Meter.

Neigung des Bodens:
Die Steigung der Bordwand wird durch $f'(x) = \frac{4}{125} \cdot x^3$ beschrieben.
Bedingung: $f'(x) < 0{,}05$
Die Gleichung $0{,}05 = \frac{4}{125} \cdot x^3$ hat die Lösung $x_1 = 1{,}160\ldots$ (GTR). F 21
Für $0 \leqq x \leqq 1{,}160\ldots$ ist die Steigung kleiner als 0,05, wie man anhand des streng monoton wachsenden Graphen erkennt.
$\left(\text{Exakter Wert: } x_1 = \sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)$
Wegen der Symmetrie zur y-Achse ergibt sich daher:

Im Bereich von etwa 1,16 Meter links und 1,16 Meter rechts vom tiefsten Punkt des Laderaums beträgt die Neigung des Bodens weniger als 5%.

Volumen des Laderaums:
Die Querschnittsfläche liegt zwischen dem Graphen von f und der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = 5$, die sich in den Punkten $S_1(5\,|\,5)$ und $S_2(-5\,|\,5)$ schneiden. Für die Maßzahl dieser Fläche gilt demnach wegen der Symmetrie zur y-Achse: F 52

$$2 \cdot \int_0^5 (5 - f(x))\,dx = 2 \cdot \int_0^5 \left(5 - \frac{1}{125}x^4\right) dx = 40 \quad \text{(GTR)}$$

Der Laderaum kann als Prisma mit der Querschnittsfläche 40 Quadratmeter und der Höhe 50 Meter angesehen werden.
Daher gilt für die Maßzahl des Volumens: $V = 40 \cdot 50 = 2000$

Das Volumen des Laderaums beträgt somit 2000 Kubikmeter.

Anmerkung: Das Integral kann auch per Hand berechnet werden. Es gilt: F 41 F 43

$$2 \cdot \int_0^5 (5 - f(x))\,dx = 2 \cdot \int_0^5 \left(5 - \frac{1}{125}x^4\right) dx = 2 \cdot \left[5x - \frac{1}{625}x^5\right]_0^5 = 2 \cdot (25 - 5) = 40$$

b) Befestigungspunkte der Stützen:

Es gilt: $f(4) = f(-4) = \frac{1}{125} \cdot 4^4 = 2{,}048$

Die Stützen enden an der Bordwand in den Punkten $P_1(-4\,|\,2{,}048)$ und $P_2(4\,|\,2{,}048)$.

Normalensteigung m_2 im Punkt P_2: F 23

Mit $f'(x) = \frac{4}{125} \cdot x^3$ folgt $m_2 = -\frac{1}{f'(4)} = -\frac{1}{\frac{4}{125} \cdot 4^3} = -0{,}488\ldots$

Gleichung der Normalen durch P_2:

$y = m_2 \cdot x + n$

Mit m_2 und den Koordinaten des Punktes P_2 ergibt sich näherungsweise die Gleichung $y = -0{,}488 \cdot x + 4$.

Anmerkung:
Manche GTR-Modelle können die Normalengleichung unmittelbar angeben.

Befestigungspunkt Q_2 der Stütze auf der Plattform:
$-0{,}488 \cdot x + 4 = 0$
Diese Gleichung hat die Näherungslösung 8,2.
Die Normale durch P_2 schneidet die x-Achse näherungsweise im Punkt $Q_2(8{,}2\,|\,0)$.

Der Abstand der beiden Befestigungspunkte auf der Plattform beträgt daher etwa 16,4 Meter.

c) Breite der Zwischendecke:
Der untere Teilraum hat das Volumen 500 Kubikmeter. Die Länge dieses Teilraums beträgt 50 Meter. Daraus ergibt sich der Flächeninhalt der Querschnittsfläche: $500\,m^3 : 50\,m = 10\,m^2$
Die Zwischendecke schneidet die Bordwand in den Punkten $R_1(-u\,|\,f(u))$ und $R_2(u\,|\,f(u))$.

F 51
F 52

Bedingung für u:

$$2\cdot\int_0^u (f(u)-f(x))\,dx = 2\cdot\int_0^u\left(\frac{1}{125}u^4-\frac{1}{125}x^4\right)dx = 10$$

Mit dem GTR folgt: $u_1 = 3{,}789\ldots$

Die Zwischendecke hat eine Breite von etwa 7,6 Meter.

Anmerkungen:
1. Das genannte Integral lässt sich auch ohne digitales Hilfsmittel angeben:

F 43
F 4

$$2\cdot\int_0^u\left(\frac{1}{125}u^4-\frac{1}{125}x^4\right)dx = 2\cdot\left[\frac{1}{125}u^4\cdot x-\frac{1}{625}x^5\right]_0^u = \frac{8}{625}\cdot u^5 = 10$$

Daraus folgt: $u = \sqrt[5]{\frac{5^5\cdot 2}{8}} = \frac{5}{2}\cdot\sqrt[5]{8}$

2. Auch der Ansatz $2\cdot\left(u\cdot f(u)-\int_0^u f(x)\,dx\right) = 10$ ist möglich.

d) Angenommen, die Röhre ließe sich bis auf den tiefsten Punkt des Laderaums absenken. Dann wäre $M(0\,|\,4{,}9)$ der Kreismittelpunkt der Querschnittsfläche. Der Abstand des Mittelpunkts zu einem beliebigen Punkt $T(u\,|\,f(u))$ des Graphen von f lässt sich dann beschreiben durch die Funktion d mit $d(u) = \sqrt{u^2+(f(u)-4{,}9)^2}$.

F 33

Das Minimum der Funktion d wird für $u_1 \approx 4{,}53$ erreicht (GTR).
Es gilt: $d_1 \approx 4{,}78 < 4{,}9$

Die Röhre kann also den tiefsten Punkt im Laderaum nicht berühren.

Aufgabe A 2.1

a) Bestimmung der geringsten Sterberate:
Der kleinstmögliche Funktionswert der Funktion s kann mit dem GTR bestimmt werden: $s_{min} = 600$

Die geringste Sterberate beträgt 600 Individuen je Jahr.

Anmerkung: Man erkennt dies aber auch ohne jede Rechnung bereits am Funktionsterm, da die Werte des zweiten Summanden im Term niemals negativ sein können und nur für $t = 6$ der Wert 0 angenommen wird.

Bestimmung der größten Differenz von Geburten- und Sterberate:
Dazu wird die Maximumstelle der Funktion d mit $d(t) = g(t)-s(t)$ mit dem GTR ermittelt. Man erhält: $t_1 = 15{,}119\ldots$

Die Differenz aus Geburten- und Sterberate war im Jahr 1975 am größten.

2

Zeitraum, in welchem die Population zunahm:
Die Population nimmt zu, wenn mehr Geburten als Sterbefälle vorkommen. Es müssen also diejenigen Werte von t ermittelt werden, für die $d(t) > 0$ gilt. Die Gleichung $d(t) = 0$ hat die Lösungen $t_2 = 3{,}218\ldots$ und $t_3 = 45{,}318\ldots$ Der Graph von d zeigt, dass für alle Werte zwischen t_2 und t_3 die Funktionswerte von d positiv sind.

F 8

Die Population hat also im Zeitraum von 1963 bis 2005 zugenommen.

b) Individuenzahl im Jahr 2017:
Aus einem Anfangsbestand von 20 000 Individuen entwickelt sich im Laufe von 57 Jahren der Bestand. Man erhält mit dem GTR:

$$20\,000 + \int_0^{57} (g(t) - s(t))\,dt \approx 35\,636$$

F 82

Im Jahr 2017 besteht die Population aus etwa 36 000 Individuen.

Wiedererreichen des Bestands von 1960:
Angenommen, der Bestand von 1960 wird u Jahre nach 1960 erstmals wieder erreicht. Dann muss der Gesamtzuwachs in dieser Zeit 0 sein.

Bedingung: $\int_0^{u} (g(t) - s(t))\,dt = 0$

Der GTR ergibt den Näherungswert $u_1 \approx 6{,}87$.

Im Jahr 1966 erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960.

c) Funktionsgleichung für die Körpergröße:
Die gesuchte Funktion f mit $f(t) = S - a \cdot e^{-b \cdot t}$ muss die Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums erfüllen: $f'(t) = b \cdot (S - f(t))$

F 84

Alle Längen werden in der Einheit 1 Meter gemessen, die Wachstumsgeschwindigkeit in der Einheit 1 Meter je Jahr, die Zeiten in der Einheit 1 Jahr.
Dem Aufgabentext entnimmt man:
Anfangsbestand: $f(0) = 0{,}5$ (Größe bei Beobachtungsbeginn)
Sättigungsgrenze: $S = 0{,}8$ (maximal erreichbare Größe)
Momentane Wachstumsgeschwindigkeit bei Beobachtungsbeginn: $f'(0) = 0{,}15$
Damit erhält man aus $f'(t) = b \cdot (S - f(t))$:

$$f'(0) = b \cdot (0{,}8 - f(0))$$
$$0{,}15 = b \cdot (0{,}8 - 0{,}5)$$
$$b = 0{,}5$$

F 1

Mit $f(0) = S - a$ folgt $a = 0{,}3$.

Die Funktionsgleichung lautet also $f(t) = 0{,}8 - 0{,}3 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t}$.
Zeitdauer für die Zunahme der Körpergröße um 50 %:
Wenn das Individuum 50 % größer geworden ist als zu Beobachtungsbeginn, dann hat es eine Größe von 0,75 Meter erreicht.
Die Bedingung für t lautet: $f(t) = 0{,}75$

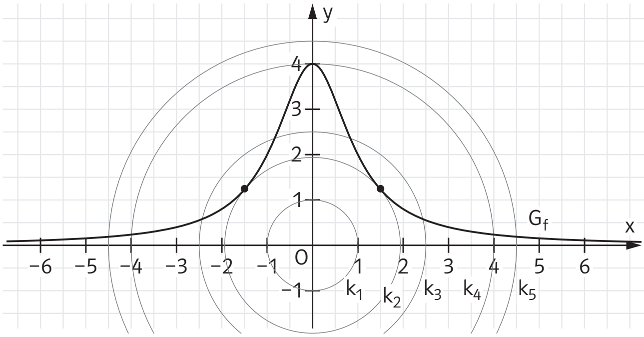
F 6

Mit dem GTR erhält man $t_1 = 3{,}583\ldots$

Etwa 3,6 Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50 % zugenommen.

Aufgabe A 2.2

Veranschaulichung der Situation:



Der Kreis k_2 berührt den Graphen G_f in zwei Punkten. In dieser Grenzlage hat ein Punkt $P(u\,|\,f(u))$ des Graphen den kleinstmöglichen Abstand d_{min} vom Ursprung und dieser Abstand wird als Kreisradius gewählt (Kreis k_2).
Ist der Kreisradius kleiner als d_{min}, so hat dieser Kreis keinen gemeinsamen Punkt mit dem Graphen G_f (Kreis k_1).
Wählt man den Kreisradius größer als d_{min}, aber kleiner als 4, dann hat der Kreis vier gemeinsame Punkte mit dem Graphen G_f (Kreis k_3).
Falls der Kreisradius 4 ist, dann berührt der Kreis den Graphen G_f im Hochpunkt und hat folglich drei gemeinsame Punkte mit G_f (Kreis k_4).
Ist der Kreisradius größer als 4, so hat der Kreis wieder nur zwei Punkte mit dem Graphen G_f gemeinsam (Kreis k_5).

Es ist also d_{min} zu bestimmen.

Der Abstand des Punktes $P(u\,|\,f(u))$ des Graphen G_f vom Ursprung O wird beschrieben durch die Funktion d mit $d(u) = \sqrt{u^2 + (f(u))^2} = \sqrt{u^2 + \frac{16}{(u^2+1)^2}}$.

F 33

Der GTR liefert das Minimum der Funktionswerte: $d_{min} = 1{,}939\ldots$

Tabellarische Zusammenstellung:

Kreisradius r	Anzahl gemeinsamer Punkte
$0 < r < d_{min}$	0
$r = d_{min}$	2
$d_{min} < r < 4$	4
$r = 4$	3
$r > 4$	2

Aufgabe B 1.1

a) Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B, C und D:

Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix}$ können als Spannvektoren **F 125**

der Ebene E aufgefasst werden.
Da eine Koordinatengleichung der Ebene gesucht ist, bestimmt man einen

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der orthogonal zu den beiden Spannvektoren ist. **F 109**

Bedingungen:

(I) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5n_1 = 0$

(II) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix} = 3{,}9n_2 - 1{,}3n_3 = 0$

Aus (I) folgt $n_1 = 0$, aus (II) folgt $3n_2 - n_3 = 0$. Wählt man $n_3 = 3$, so ergibt sich $n_2 = 1$.

Ein Normalenvektor lautet daher $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Ebenengleichung in Koordinatenform heißt somit $x_2 + 3x_3 = d$ mit noch unbekanntem d, $d \in \mathbb{R}$. Da der Punkt $A(0\,|\,0\,|\,4)$ auf der Ebene liegt, folgt daraus $d = 12$.

Die Ebene E, die die Lage der Markise beschreibt, hat die Gleichung $x^2 + 3x^3 = 12$.

Weite α des Winkels zwischen der Markise und der Hauswand: **F 153 a**
Die Hauswand liegt in der x_1x_3-Ebene.

Der Normalenvektor dieser Ebene ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **F 108**

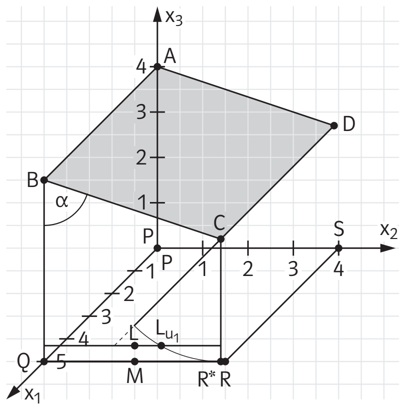
Daher gilt: $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}3162$ **F 151**

Der Winkel zwischen Markise und Hauswand hat näherungsweise die Weite 71,6°.

Anmerkung:
Manche GTR-Modelle können den Winkel zwischen zwei Vektoren unmittelbar angeben.

F 161

b) Überprüfung auf Berührung:
Zunächst wird der höchste Punkt L der Stablampe bestimmt.
Der Fußpunkt der Lampe liegt im Mittelpunkt M(5|2|0) der Strecke QR.
Im Modell liegt der höchste Punkt L der Lampe 0,3 Längeneinheiten über der x_1x_2-Ebene. Der höchste Punkt der Lampe hat die Koordinaten L(5|2|0,3).



Abstand des Punktes L von der Ecke C der Markise:
Es kann angenommen werden, dass die Kante CR* des Regenschutzes in der Ebene durch die Punkte Q, R, C und B schwingt. Nur so kann das ursprünglich im Punkt R*(5|3,9|0) befindliche Ende des Regenschutzes kleinstmöglichen Abstand von L erhalten.
Der Regenschutz kann die Lampe nur berühren, wenn der höchste Punkt L von der Ecke C einen kleineren Abstand hat als die Länge CR* des Regenschutzes.

Es gilt: $d(L;C) = |\overrightarrow{LC}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}9 \\ 2{,}7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}9 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 1{,}9^2 + 2{,}4^2} = 3{,}061\ldots$

Der Punkt L hat von C näherungsweise den Abstand 3,06 Meter.
Die Länge $\overline{CR^*}$ des Regenschutzes beträgt 2,70 Meter, ist also kleiner als der Abstand 3,06 Meter des Punktes C von L.

Der Regenschutz kann die Stablampe daher nicht berühren.

F 161

Maximal möglicher Abstand der Stablampe von der Hauswand:
Die Stablampe wird längs der Terrassenkante QR verschoben.
Der neue Fußpunkt der Lampe habe die x_2-Koordinate u, $2 \leqq u \leqq 4$.
Der dann höchste Punkt ist $L_u(5|u|0{,}3)$.

Für den Abstand des Punktes L_u von der Ecke C der Markise gilt:

$$d(L_u;C) = |\overrightarrow{L_uC}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}9 \\ 2{,}7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ u \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}9-u \\ 2{,}4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + (3{,}9-u)^2 + 2{,}4^2}$$

Der Regenschutz berührt die Lampe nicht, wenn $d(L_u;C) > 2{,}70$ und $0 \leqq u \leqq 4$ gilt.

Die Gleichung $\sqrt{0^2 + (3{,}9-u)^2 + 2{,}4^2} = 2{,}70$ für den Grenzfall wird mit dem GTR gelöst.

Man erhält $u_1 = 2{,}663\ldots$

Die Stablampe darf daher von der Hauswand höchstens den Abstand 2,66 Meter haben.

c) Begründung für unvollständige Beschattung der Terrasse:
1. Lösungsweg: Argumentation von Kante RS aus

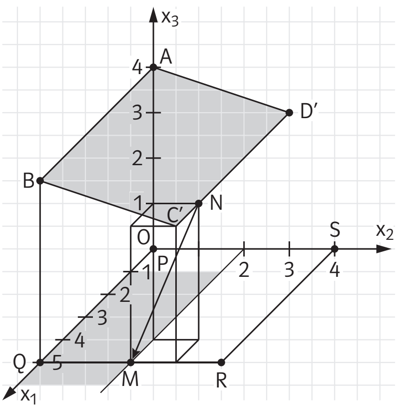
Würde das Sonnenlicht senkrecht auf die x_1x_2-Ebene durch den Punkt C der Markise fallen, so läge der Schattenpunkt $C^*(5\,|\,3{,}9\,|\,0)$ von C auf der 4 Meter breiten Terrasse. Ein schmaler Streifen längs der Kante RS der Terrasse wäre also nicht beschattet.
Da der Richtungsvektor der Sonnenstrahlen eine negative x_2-Koordinate hat, wäre die x_2-Koordinate des tatsächlichen Schattenpunkts C^{**} von C sicher kleiner als 3,9. Damit wäre ein breiterer Streifen parallel zu dieser Kante von der Sonne beschienen und die Terrasse nicht vollständig beschattet.

2. Lösungsweg: Argumentation von Kante PS aus:

Da der Richtungsvektor der Sonnenstrahlen eine positive x_1-Koordinate hat, wäre die x_1-Koordinate des Schattenpunkts D^* von D sicher größer als 0. Entsprechendes würde für den Schattenpunkt A^* von A gelten. Damit wäre ein Streifen längs der Kante PS von der Sonne beschienen und die Terrasse nicht vollständig beschattet.

Neue Lage der Markisenpunkte C′ und D′:

1. Lösungsweg:
Die neue Markisenkante C′D′ wirft ihren Schatten auf die Mittelparallele zu den Geraden durch die Seiten QP und RS der Terrasse. Ein Punkt dieses Schattens ist daher der Mittelpunkt $M(5\,|\,2\,|\,0)$ der Strecke QR (vergleiche Teilaufgabe a)). Mithilfe des Richtungsvektors des Sonnenlichts lässt sich nun der Punkt dieser Markisenkante ermitteln, dessen Schatten auf M fällt. Dies ist der Schnittpunkt N der Geraden g durch M mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ mit der Ebene E.



F 141 b

Gleichung der Geraden:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

F 121

Bestimmung des Schnittpunkts von g und E:

$$1\cdot(2-t) + 3\cdot(0-3t) = 12$$
$$2 - t - 9t = 12$$
$$t = -1$$

F 133 a

Der Punkt $N(4\,|\,3\,|\,3)$ auf der Markisenkante wirft seinen Schatten auf den Punkt M.

Die Punkte C′ und D′ auf dieser Markisenkante haben dieselben x_2- und x_3-Koordinaten wie N. Die x_1-Koordinate von C′ ist 5, da C′ auf BC liegt, die x_1-Koordinate von D′ ist 0, da D′ auf AD liegt.

Die äußeren Eckpunkte der teilweise eingefahrenen Markise sind $C'(5\,|\,3\,|\,3)$ und $D'(0\,|\,3\,|\,3)$.

2. Lösungsweg:
Der Markisenpunkt C′ liegt auf drei Ebenen:
1. der Ebene E, in der die Markise liegt,
2. der Lichtebene F, von der ein Spannvektor $\vec{u}$ die Richtung der Schattenlinie durch M hat, der andere Spannvektor $\vec{v}$ der Richtungsvektor der Lichtstrahlen ist,
3. der Ebene G durch B, Q und C.

C′ kann also als Schnittpunkt der drei Ebenen berechnet werden.

Ebenengleichungen:
Ebene E (aus Teilaufgabe a)): $x_2 + 3x_3 = 12$

Ebene F: Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und M(5|2|0) erhält man

$3x_2 - x_3 = 6.$

F 109

F 125

Ebene G: $x_1 = 5$

F 9

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & x_2 + 3x_3 & = & 12 \\ \text{(II)} & 3x_2 - x_3 & = & 6 \\ \text{(III)} & x_1 & = & 5 \end{array}$$

hat die Lösung (5;3;3) und damit kennt man C′(5|3|3).
Da D′ auf der Parallelen zur x_1-Achse durch C′ und in der x_2x_3-Ebene liegt, kennt man auch D′(0|3|3).

Die äußeren Eckpunkte der teilweise eingefahrenen Markise sind C′(5|3|3) und D′(0|3|3).

Aufgabe B 1.2

F 241

Formulierung der Entscheidungsregel:
Nullhypothese H_0: $p \geqq 0{,}8$; Gegenhypothese H_1: $p < 0{,}8$
Es liegt ein linksseitiger Hypothesentest vor.
X ist die Anzahl der keimenden Weizenkörner.
Stichprobenumfang: $n = 500$
Signifikanzniveau: $10\,\% = 0{,}1$
Im Extremfall liegt eine $B_{500;\,0{,}8}$-Verteilung vor.

Gesucht ist das größte g, für das gilt: $P(X \leqq g) \leqq 0{,}1$

Man erstellt mit dem GTR eine Wertetabelle für die kumulierte Binomialverteilung:

g	386	387	388
P(X ≦ g)	0,0673	0,0826	0,1004

Der GTR liefert: $g = 387$

Alternative: Falls der GTR über einen inversen Binomialbefehl verfügt, kann man $g + 1$ direkt mit dem GTR berechnen.
Der GTR liefert $g + 1 = 388$, also $g = 387$.

Entscheidungsregel:
Falls bei diesem Test höchstens 387 Weizenkörner keimen, wird die Nullhypothese H_0 abgelehnt.

Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird:

F 241

H_0 wird fälschlicherweise abgelehnt, falls $X \leqq 387$ ist.
Es liegt eine $B_{500;0,82}$-Verteilung vor.

Der GTR liefert: $P(X \leqq 387) \approx 0{,}0053$

Die Nullhypothese wird mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,53 % fälschlicherweise abgelehnt.

Aufgabe B 2.1

a) Bestimmung des Schnittpunkts S von g_4 und Ebene E:

F 133 a

$$g_4\colon\ x = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$$

F 1

$$\begin{aligned} 3\cdot(5+4t) + 6\cdot(1+t) + 4\cdot(1+0t) &= 16\\ 15+12t+6+6t+4 &= 16\\ 18t &= -9\\ t &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhält man: $\vec{s} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt ist $S(3\,|\,0{,}5\,|\,1)$.

Berechnung der zu g_4 orthogonalen Geraden der Schar:
Der Richtungsvektor der gesuchten Geraden muss orthogonal zum Richtungsvektor von g_4 sein.

Bedingung für a:

F 183

$$\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = 4a+1 = 0$$

F 108

Daraus erhält man $a = -\frac{1}{4}$.

Die Gerade $g_{-\frac{1}{4}}$ ist zur Geraden g_4 orthogonal.

b) Schnittwinkel zwischen Gerade g_4 und Ebene E:

F 154

Ein Richtungsvektor von g_4 ist $\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$, ein Normalenvektor der Ebene ist $\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}$.

Für die Weite α des Schnittwinkels gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{|4\cdot3+1\cdot6+0\cdot4|}{\sqrt{4^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+6^2+4^2}} = \frac{18}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{61}} \approx 0{,}5590$$

F 108
F 151

Die Weite des Schnittwinkels zwischen der Geraden g_4 und der Ebene E beträgt etwa 34,0°.

Bestimmung der Parameterwerte zum Schnittwinkel der Weite 10°:
Für die Weite α_a des Schnittwinkels zwischen der Geraden g_a und der Ebene E gilt:

$$\sin(\alpha_a) = \frac{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|a \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 4|}{\sqrt{a^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{3^2+6^2+4^2}} = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$$

F 154
F 108

Daraus ergibt sich mit $\alpha_a = 10°$: $\sin(10°) = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$; $-10 \leqq a \leqq 10$

$$\sin(10°) = \frac{3a+6}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}} \quad \text{oder} \quad \sin(10°) = \frac{-(3a+6)}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$$

Mit dem GTR folgt aus der ersten Gleichung $a_1 = -1{,}269\ldots$ und aus der zweiten Gleichung $a_2 = -3{,}758\ldots$

Für die Werte −1,27 und −3,76 hat der Schnittwinkel der Geraden g_a mit der Ebene E etwa die Weite 10°.

c) Begründung dafür, dass alle Geraden g_a in der Ebene F liegen:

F 133 a
F 184

Aus der Geradengleichung liest man ab, dass jeder Punkt einer jeden Geraden der Schar die x_3-Koordinate 1 hat, denn es gilt: $P_a(5+t \cdot a \mid 1+t \cdot 1 \mid 1)$. Daher liegen alle Punkte von allen Geraden ga in der Ebene F mit der Gleichung $x_3 = 1$.

Bestimmung einer Gleichung der Geraden h:

Von h ist ein Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bekannt. Die Gleichung der Geraden lässt sich in der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ darstellen, wobei der Richtungsvektor noch näher bestimmt werden muss.

Da die Gerade h in der Ebene F liegen soll, muss für jeden Geradenpunkt, d.h. für alle $r \in \mathbb{R}$, die x_3-Koordinate $1 + r \cdot v_3$ den Wert 1 haben, weshalb $v_3 = 0$ gelten muss.
Da die Gerade h keine Gerade der Schar sein soll, darf der Richtungsvektor nicht (von Null verschiedenes) Vielfaches des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein.

Es darf also keine reelle Zahl s, $s \neq 0$, geben, die eine Lösung der Gleichung $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Dies ist sicher dann gewährleistet, wenn man $v_2 = 0$ wählt.
Jeder Vektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann daher als Richtungsvektor verwendet werden.

v_1 kann beliebig gewählt werden, etwa $v_1 = 1$.

Eine Gleichung der gesuchten Geraden h heißt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe B 2.2

F 231

a) Wahrscheinlichkeit, dass der Athlet stehend viermal trifft:
X sei die Anzahl der Treffer beim Stehendschießen.
Es liegt eine $B_{5;0,88}$-Verteilung vor.

$P(X = 4) \approx 0{,}3598$ (GTR)

Der Athlet trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 36 % beim Stehendschießen viermal.

b) Wahrscheinlichkeit, dass der Athlet höchstens eine Strafrunde laufen muss:
Man betrachtet folgende Ereignisse:
J: Der Athlet trifft bei jedem Schuss.
L: Der Athlet trifft liegend fünfmal und stehend viermal
S: Der Athlet trifft stehend fünfmal und liegend viermal

F 211

Es gilt: $P(J) = 0{,}88^5 \cdot 0{,}93^5 = 0{,}36713\ldots$
$P(L) = 0{,}88^5 \cdot 5 \cdot 0{,}93^4 \cdot 0{,}07 = 0{,}13816\ldots$
$P(S) = 0{,}93^5 \cdot 5 \cdot 0{,}88^4 \cdot 0{,}12 = 0{,}25032\ldots$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Athlet höchstens eine Strafrunde laufen muss, gilt:
$P(J) + P(L) + P(S) \approx 0{,}7556$

Der Athlet muss mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 75,6 % höchstens eine Strafrunde laufen.

F 233

c) Bestimmung der Trefferwahrscheinlichkeit:
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Athlet beim Stehendschießen trifft, sei p.
Es liegt demnach eine $B_{5;p}$-Verteilung vor.
Es soll gelten: $P(X \geqq 4) > 0{,}95$
$P(X \geqq 4) = 1 - P(X \leqq 3) > 0{,}95$; d.h. $P(X \leqq 3) < 0{,}05$
Man betrachtet den Grenzfall: $P(X \leqq 3) = 0{,}05$
Diese Gleichung enthält p als Variable. Man löst sie näherungsweise mit dem GTR (entweder mit dem Solver oder grafisch).

Alternative: Man erstellt mit dem GTR eine Wertetabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeit für verschiedene Werte von p und verfeinert diese Tabelle so lange, bis man die gewünschte Genauigkeit für die Lösung p erhält.

Der GTR liefert: $p \approx 0{,}9236$

Der Athlet muss eine Trefferwahrscheinlichkeit von mindestens ca. 92,4 % erreichen.