

Abitur 2015

Aufgaben

Prüfungsteil A (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabe A1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (3x - 1) \cdot e^{-x}$.

- 1 P **a)** Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion f .
- 3 P **b)** Welche Regelmäßigkeit vermuten Sie bezüglich der Ableitungen? (Text)
- 2 P **c)** Notieren Sie f''' und $f^{(4)}$, ausgehend von der Vermutung aus (2).

Tipp 1

Tipp 2

Tipp 3

Aufgabe A2

- a)** Der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2$ hat an der Stelle $x = 1$ eine Tangente t mit der Gleichung $t(x) = 6,5x - 3$.

- 3 P **Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f .**

Tipp 4

- b)** Die Funktion f aus dem Aufgabenteil a) gehört zur Funktionsschar f_k mit der Gleichung

$$f_k(x) = -0,5x^3 + k \cdot x^2; \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Der Graph jedes Scharvertreters schließt mit der x -Achse im 1. Quadranten eine Fläche ein.

Ermitteln Sie rechnerisch den Scharvertreter, der mit der x -Achse im 1. Quadranten eine Fläche mit dem Flächeninhalt 54 Flächeneinheiten einschließt.

3 P

Tipp 5

Aufgabe A3

Die Punkte $A(0|-1|2)$, $B(12|15|2)$ und $C(-4|27|2)$ und $D(-16|11|2)$ sind die Eckpunkte des Quadrates $ABCD$. Gegeben ist zudem der Punkt $P(9|11|2)$.

- 2 P **a)** Zeigen Sie, dass der Punkt P auf der Strecke \overline{AB} liegt.
- 4 P **b)** Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die Strecke \overline{PD} das Quadrat $ABCD$ teilt.

Tipp 6

Tipp 7

Aufgabe A4

In einer Urne liegen Kugeln, die entweder mit dem Buchstaben A, dem Buchstaben B oder dem Buchstaben C beschriftet sind. Aus der Urne wird n -mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit dem Buchstaben A zu ziehen, beträgt 30%,

eine Kugel mit dem Buchstaben B zu ziehen, beträgt 30 % und eine Kugel mit dem Buchstaben C zu ziehen, beträgt 40 %.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft der Buchstabe A gezogen wird.

2 P a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

b) Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung (gerundet auf zwei Dezimalen) von X :

k	0	1	2	3	4	5	6	...
$P(X = k)$	0,01	0,07	0,17	0,24	0,23	0,16	0,08	...

1 P (1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zweimal der Buchstabe A gezogen wird.

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens viermal der Buchstabe A gezogen wird.

1 P

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 12, 15 oder 18.

2 P Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Tipp 8

Tipp 9

Tipp 10

Tipp 11

Prüfungsteil B (mit Hilfsmittel)

Aufgaben B1

Ein Schüler beobachtet in einem Experiment insgesamt sechs Tage lang die Vermehrung von Pantoffeltierchen in einer Nährlösung. Zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage verwendet er für $0 \leq t \leq 3$ die Funktion N_1 mit der Gleichung

$$N_1(t) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Tag und $N_1(t)$ als Anzahl der Pantoffeltierchen zum Zeitpunkt t aufgefasst. Der Graph von N_1 ist in Abbildung 1 dargestellt.

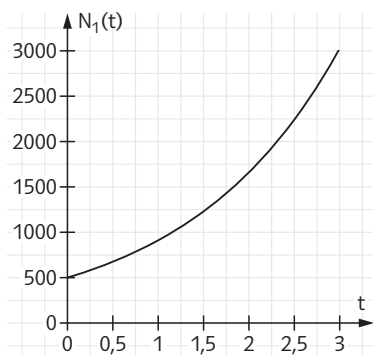


Abbildung 1

- 2 P a) (1) Berechnen Sie den Funktionswert von N_1 an der Stelle $t = 3$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.
- 3 P (2) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden sind.

— Tipp 12

— Tipp 13

- b) Während der ersten drei Tage (für $0 \leq t \leq 3$) wird im Modell des Schülers die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen durch die Funktion r_1 mit der Gleichung

$$r_1(t) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

beschrieben.

Dabei wird $r_1(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Tier pro Tag aufgefasst.

- 5 P (1) Für die Funktion r_1 und die zugehörige Ableitungsfunktion r_1' gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage: $r_1(t) > 0$ und $r_1'(t) > 0$.
[Die Gültigkeit dieser Aussage müssen Sie nicht nachweisen.]
Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang.
- 4 P (2) Ermitteln Sie die größte momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung in den ersten drei Tagen.

— Tipp 14

— Tipp 15

- c) Bei der weiteren Beobachtung erkennt der Schüler, dass nach etwa drei Tagen die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen geringer wird. Um die Entwicklung ab dem Zeitpunkt $t = 3$ zu prognostizieren, sucht er eine Funktion, für deren momentane Änderungsrate r_2 zu jedem Zeitpunkt $t = 3 + a$ mit $0 \leq a \leq 3$ die Gleichung $r_2(3 + a) = r_1(3 - a)$ gilt.

3 P

- (1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung $r_2(3 + a) = r_1(3 - a)$, $0 \leq a \leq 3$, im Sachzusammenhang.

Tipp 16

- (2) Leiten Sie aus der Gleichung $r_1(t) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot t}$ für die momentane Änderungsrate r_1 und der Gleichung $r_2(3 + a) = r_1(3 - a)$, die Gleichung

$$r_2(t) = 300 \cdot e^{3,6 - 0,6 \cdot t}, \quad 3 \leq t \leq 6,$$

zur Modellierung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag her.

4 P

Tipp 17

- (3) Ermitteln Sie ausgehend von den Funktionen N_1 und r_2 eine Gleichung der Funktion N_2 , durch die die Anzahl der Pantoffeltierchen bis zum Ende der Beobachtung (also für $3 \leq t \leq 6$) beschrieben werden kann.

4 P

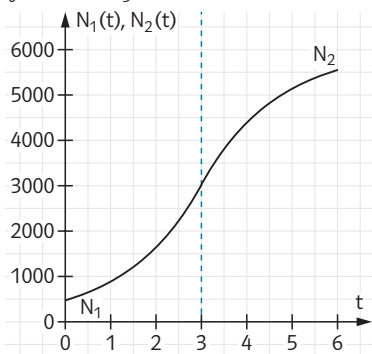
Die Stammfunktion zu $r_2(t)$ lautet: $R_2(u) = 300 \cdot \frac{1}{(-0,6)} \cdot e^{3,6 - 0,6 \cdot u}$.

Tipp 18

[Zur Kontrolle: $N_2(t) = 1000 \cdot e^{1,8} - 500 \cdot e^{3,6 - 0,6 \cdot t}$.]

- (4) Erklären Sie anhand von Abbildung 2, weshalb die folgende Gleichung gilt:

$$\int_0^3 N_1(t) dt + \int_3^6 N_2(t) dt = 6 \cdot N_1(3).$$



4 P

Tipp 19

Abbildung 2

[Die Punktsymmetrie des Graphen zu $(3 | N_1(3))$ muss nicht nachgewiesen werden.]

- (5) Der Schüler verwendet die Funktion N_2 auch zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen für $t \geq 6$. Begründen Sie, dass in diesem Modell die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung zu keinem Zeitpunkt größer als 6050 wird.

3 P

Tipp 20

Aufgabe B2

Eine Familie will ihren Bedarf an Wärmeenergie (thermischer Energie) für Heizung und Warmwasser teilweise durch eine thermische Solaranlage (kurz: Solaranlage) decken.

Anhand der Angaben des Solaranlagenherstellers und der Verbrauchswerte der Familie aus dem letzten Kalenderjahr wurde das folgende Modell für ein beispielhaftes Kalenderjahr aufgestellt.

Die Leistung der Solaranlage wird durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400, \quad t \in \mathbb{R},$$

und der thermische Leistungsbedarf der Familie (kurz: Leistungsbedarf) durch die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = -t^4 + 26t^3 - 167,5t^2 - 12,5t + 2053, \quad t \in \mathbb{R},$$

modelliert, und zwar für das Zeitintervall $[0; 12]$, das dem Kalenderjahr entspricht.

Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 Monat und $f(t)$ sowie $g(t)$ als Maßzahlen zur Einheit 1 Kilowattstunde pro Monat [kWh/Monat] auf.

Im Modell umfasst jeder Monat 30 Tage. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Kalenderjahres.

Die Graphen von f und g sind in der folgenden Abbildung 1 dargestellt:

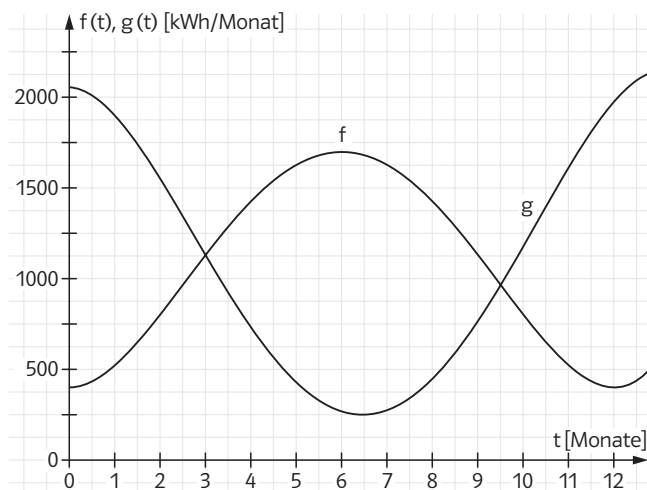


Abbildung 1

- 5 P a) (1) *Vergleichen Sie die Graphen von f und g im Sachzusammenhang.*
- (2) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt der maximalen Leistung der Solaranlage und berechnen Sie den Maximalwert.*
- 8 P (3) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Intervall $[0; 12]$, zu dem der durch g beschriebene Leistungsbedarf der Familie innerhalb dieses Kalenderjahres am stärksten abnimmt.*
- 9 P

Tipp 21

Tipp 22

Tipp 23

Durch das Integral $\int_a^b f(t) dt$ ist im Sachzusammenhang die aus der Solaranlage im Zeitintervall $[a; b]$ abrufbare Energie und durch das Integral $\int_a^b g(t) dt$ der Energiebedarf der Familie im Zeitintervall $[a; b]$ für $0 \leq a \leq b \leq 12$ in Kilowattstunden [kWh] gegeben.

4 P

b) (1) Bestimmen Sie rechnerisch den Energiebedarf der Familie für das Kalenderjahr.

Tipp 24

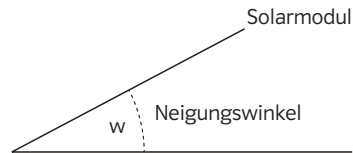
(2) Im Intervall $[3; 9,5]$ wird der Leistungsbedarf der Familie zu jedem Zeitpunkt durch die Solaranlage gedeckt. Die den Bedarf übersteigende Leistung der Solaranlage soll in diesem Zeitraum zusätzlich zum Heizen eines Gartenpools genutzt werden.

6 P

Ermitteln Sie rechnerisch die Energie, die zum Heizen des Gartenpools im Intervall $[3; 9,5]$ zur Verfügung steht.

Tipp 25

c) Die Leistung der Solaranlage ist abhängig von der Neigung der aufgestellten Solarmodule.



Die Funktion f_a mit der Gleichung

$$f_a(t) = a \cdot (t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400) - 400 \cdot (a^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0,5 \leq a \leq 1,5,$$

modelliert im Intervall $[0; 12]$ diese Leistung für ein Kalenderjahr, wobei der Parameter a eine Kennzahl für die Neigung der Solarmodule ist. Jedem Wert des Parameters a kann über die Gleichung $w = 116 - 66 \cdot a$ die Maßzahl für den entsprechenden Neigungswinkel in Grad zugeordnet werden.

In der folgenden Abbildung 2 sind beispielhaft für zwei Werte von a die Graphen der jeweils zugehörigen Funktion f_a sowie der Graph von g dargestellt.

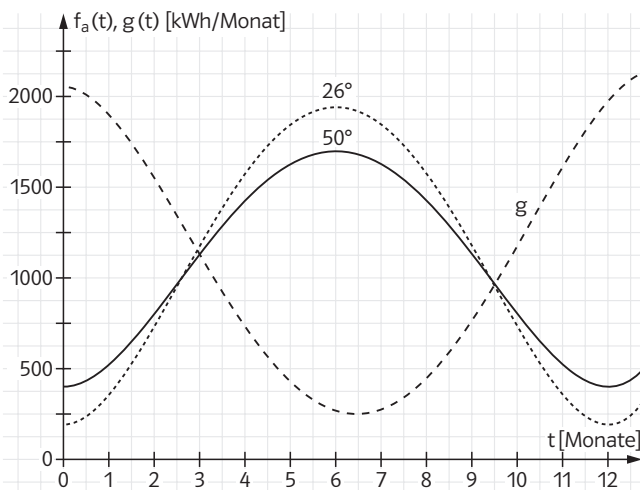


Abbildung 2

- 4 P (1) Zeigen Sie, dass f eine der Funktionen f_a ist, und berechnen Sie den zugehörigen Neigungswinkel w der Solarmodule.
- 9 P (2) Weisen Sie nach, dass die in einem Jahr aus der Solaranlage abrufbare Energie für $a = 1,364$ (d.h. $w \approx 26^\circ$) am größten ist.
- (3) Der Solaranlagenhersteller behauptet, dass eine Solaranlage mit einem Neigungswinkel von 50° den Leistungsbedarf der Familie (ohne Heizung des Gartenpools!) in dem Kalenderjahr besser deckt als eine Solaranlage mit einem Neigungswinkel von 26° .
- 5 P Begründen Sie diese Behauptung anhand der Graphen in Abbildung 2.
[Eine Rechnung wird hier nicht verlangt.]

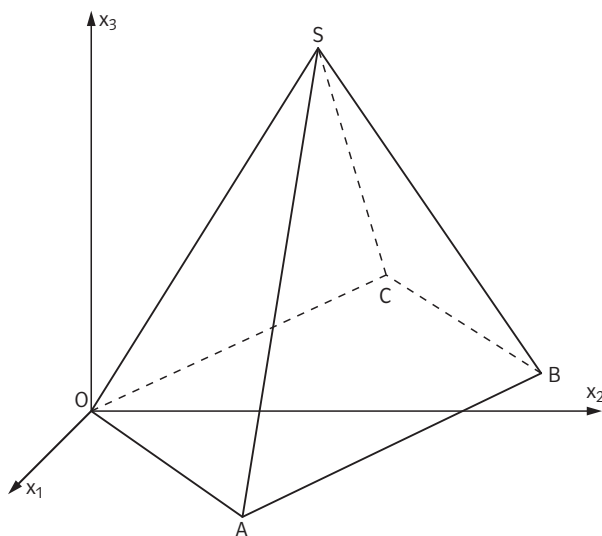
Tipp 26

Tipp 27

Tipp 28

Aufgabe B3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(6|8|0)$, $B(-2|14|0)$, $C(-8|6|0)$ und $S(-1|7|10)$ Eckpunkte der Pyramide $OABCS$, deren Grundfläche das Viereck $OABC$ ist (siehe Abbildung).



Abbildung

Im Folgenden darf verwendet werden, dass die Seitendreiecke der Pyramide zueinander kongruent sind.

- 5 P a) (1) Zeigen Sie, dass das Viereck $OABC$ ein Quadrat ist.
- 5 P (2) Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide $OABCS$.

Tipp 29

Tipp 30

- 5 P **b)** (1) *Leiten Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene E her, die durch die Punkte B , C und $Q(3 | 4 | 10)$ festgelegt ist.* Tipp 31
- Diese Ebene gehört zu der durch $E_a: -4a \cdot x_1 + 3a \cdot x_2 + 25 \cdot x_3 = 50a$, $a \in \mathbb{R}$, gegebenen Ebenenschar.
[Zur Kontrolle: z.B. $E = E_5$.]
- 3 P (2) *Zeigen Sie, dass die Punkte B und C in jeder Ebene E_a liegen.* Tipp 32
- 4 P (3) *Nennen Sie ohne Nachweis die verschiedenen Arten von Schnittgebilden, die beim Schnitt einer der Ebenen E_a mit der Pyramide $OABCS$ entstehen können.* Tipp 33
- 3 P (4) *Für genau einen Wert von a ist das Schnittgebilde von Ebene und Pyramide ein Dreieck.
Bestimmen Sie den entsprechenden Wert von a .* Tipp 34
- 8 P (5) *Die Ebene E zerlegt die Pyramide $OABCS$ in zwei Teilkörper. Sie können ohne Nachweis verwenden, dass das Schnittgebilde den Flächeninhalt $\frac{400}{9} \cdot \sqrt{2}$ [FE] besitzt.
Bestimmen Sie ein Verhältnis der Rauminhalte der beiden Teilkörper.* Tipp 35
- 6 P **c)** *Auf der Geraden AS gibt es genau einen Punkt P , sodass die Strecken \overline{OP} und \overline{BP} senkrecht zu AS sind.* Tipp 36
- (1) *Bestimmen Sie die Koordinaten von P .*
[Zur Kontrolle: $P = \left(\frac{11}{3} \mid \frac{23}{3} \mid \frac{10}{3}\right)$.]
- 5 P (2) *Begründen Sie, dass der Streckenzug \overline{OPB} ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide (Mantel: Oberfläche ohne Grundfläche) ist, und berechnen Sie die Länge des Streckenzuges.* Tipp 37
- 6 P (3) *Es gibt einen weiteren Streckenzug \overline{ONB} ($N \neq P$), der ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide ist.
Begründen Sie diese Aussage und bestimmen Sie die Koordinaten von N .* Tipp 38

Aufgabe B4

Eine Firma stellt mit zwei verschiedenen Maschinen A und B Bodenfliesen aus Keramik her. Damit eine Fliese als „1. Wahl“ gilt, muss sie strenge Qualitätsnormen erfüllen. Alle anderen Fliesen werden als „2. Wahl“ bezeichnet. Eine Fliese, die mit Maschine A produziert wurde, ist erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 „1. Wahl“ (d.h. mit der Wahrscheinlichkeit von 0,1 „2. Wahl“). Maschine B produziert lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 „1.-Wahl“-Fliesen. Dabei kann für beide Maschinen davon ausgegangen werden, dass die Produktion von Fliesen 1. und 2. Wahl jeweils stochastisch unabhängig erfolgt. Fliesen, die von Maschine A produziert wurden, werden im Folgenden als A-Fliesen bezeichnet, Fliesen von Maschine B als B-Fliesen. Jede Packung enthält 20 Fliesen, die von derselben Maschine stammen.

- 2 P **a)** (1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung A-Fliesen genau zwei „2.-Wahl“-Fliesen enthalten sind.* Tipp 39

- 3 P (2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung A-Fliesen maximal 80 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl“ haben. Tipp 40
- Die 20 Fliesen einer Packung B-Fliesen wurden in 4 Reihen mit jeweils 5 Fliesen verlegt.
- 2 P (3) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit \tilde{p} dafür, dass eine zufällig ausgewählte Reihe nur „1.-Wahl“-Fliesen enthält. [Kontrollergebnis $\tilde{p} = 0,32768$] Tipp 41
- 3 P (4) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur „1.-Wahl“-Fliesen enthält. Tipp 42
- b)** An Großabnehmer verkauft die Firma auch Paletten, die jeweils 500 Packungen Fliesen von derselben Maschine enthalten. Ein Bauunternehmer bestellt eine Palette mit A-Fliesen. Da die Packungen bei der Lieferung nicht gekennzeichnet sind, befürchtet er, versehentlich eine Palette mit B-Fliesen erhalten zu haben.
- Er beschließt, für einen Test der Lieferung zufällig 100 Fliesen zu entnehmen und die Anzahl X der „2.-Wahl“-Fliesen in dieser Stichprobe zu bestimmen.
- 3 P (1) Begründen Sie, dass X als binomialverteilte Zufallsgröße aufgefasst werden kann, wobei die Trefferwahrscheinlichkeit bei A-Fliesen $p = 0,1$ und bei B-Fliesen $p = 0,2$ beträgt. Tipp 43
- (2) Es wird ein Hypothesentest mit der Nullhypothese $H_0: p \geq 0,2$ durchgeführt. Wird H_0 verworfen, wird die Palette angenommen, sonst wird sie zurückgeschickt.
- 3 P Erklären Sie die Wahl der Nullhypothese. Tipp 44
- (3) Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel (auf Basis der genannten Nullhypothese) für die oben genannte Stichprobe von 100 Fliesen mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit (d.h. Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art) von höchstens 5%. Tipp 45
- [Zur Kontrolle: H_0 wird für $X \leq 13$ abgelehnt.]
- (4) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_A , dass die Hypothese H_0 aufgrund der Entscheidungsregel aus (3) irrtümlich nicht abgelehnt wird, obwohl die Palette tatsächlich A-Fliesen enthält, also $p = 0,1$ gilt. Tipp 46
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_B , dass die Hypothese H_0 irrtümlich abgelehnt wird, obwohl die Palette tatsächlich B-Fliesen enthält, also $p = 0,2$ gilt. Tipp 47
- 4 P [Zur Kontrolle: $p_A \approx 0,1239$, $p_B \approx 0,0469$]
- (5) Im Lager des Herstellers befanden sich 7 Paletten mit A-Fliesen und 3 Paletten mit B-Fliesen, aus denen die angelieferte Palette zufällig ausgewählt wurde.
- 3 P Bestimmen Sie mithilfe der Wahrscheinlichkeiten p_A und p_B die gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit für den Test. Tipp 48
- c)** Für besonders anspruchsvolle Kunden soll eine Sorte „Premium“ angeboten werden, die nur aus „1.-Wahl“-Fliesen besteht.
- Dazu will die Firma die „2.-Wahl“-Fliesen aus der Produktion der Maschine A aussortieren. Für einen ersten Sortiervorgang wird ein Testgerät verwendet, das allerdings nicht immer optimal funktioniert:

Das Testgerät erkennt eine „2.-Wahl“-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von $w = 0,8$ („Aussortierwahrscheinlichkeit“) und sortiert sie aus. Andererseits wird eine „1.-Wahl“-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,05$ zu Unrecht als „2. Wahl“ aussortiert.

- 6 P (1) Stellen Sie die Situation graphisch dar (mit einer Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten).
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl“ einstuft (also nicht aussortiert).
- 3 P (2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit eine „2.-Wahl“-Fliese ist.
- 4 P (3) Bestimmen Sie, wie groß die „Aussortierwahrscheinlichkeit“ w des Testgeräts mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit aus (2) (und damit der erwartete Anteil der „2.-Wahl“-Fliesen nach dem Aussortieren) durch die Prüfung auf unter 1% gesenkt wird.

Tipp 49

Tipp 50

Tipp 51

Tipp 52

Tipps

Folgende Tipps geben eine erste Hilfestellung:

 Tipp 1 	Welche Ableitungsregeln benötigen Sie hier?
 Tipp 2 	Fällt Ihnen beim Bilden der Ableitungen eine Gesetzmäßigkeit auf?
 Tipp 3 	Wenden Sie das in b) erkannte Muster an.
 Tipp 4 	Entnehmen Sie dem Aufgabentext zwei Bedingungen für f und f' .
 Tipp 5 	Bestimmen Sie die Nullstellen eines beliebigen Scharvertreters.
 Tipp 6 	Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden AB.
 Tipp 7 	Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt in einer Skizze.
 Tipp 8 	Überlegen Sie, welche Voraussetzungen gegeben sein müssen, damit eine Zufallsvariable binomialverteilt ist.
 Tipp 9 	Beachten Sie die Definition der Zufallsvariablen X .
 Tipp 10 	Formulieren Sie das Gegenereignis zu $X \geq 4$.
 Tipp 11 	Beachten Sie, wie man bei einer Binomialverteilung den Erwartungswert μ berechnet.
 Tipp 12 	Welche Größe wird durch die Funktion N_1 modellhaft beschrieben?
 Tipp 13 	Stellen Sie eine Gleichung auf, die der Aufgabenstellung entspricht.
 Tipp 14 	Welche Bedeutung hat es, wenn die momentane Änderungsrate einer Größe immer positiv ist?
 Tipp 15 	Beachten Sie, dass Sie aus (1) auf die Monotonie von r_1 schließen können.
 Tipp 16 	Berechnen Sie die Funktionswerte von r_1 und r_2 für $a = 1$ und $a = 2$.
 Tipp 17 	Beachten Sie den Zusammenhang zwischen t und a .
 Tipp 18 	Hier müssen Sie die gesuchte Bestandsfunktion mithilfe ihrer momentanen Änderungsrate bestimmen.
 Tipp 19 	Welche geometrische Bedeutung haben hier die beiden Integrale?
 Tipp 20 	Beachten Sie die Vorzeichen in der Funktionsgleichung von N_2 .
 Tipp 21 	Die Graphen in Abbildung 1 beschreiben direkt die Leistung der Solaranlage und den Leistungsbedarf der Familie. Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen unter Beachtung der Achsenbeschriftungen.
 Tipp 22 	Bestimmen Sie ohne Verwendung des GTR die lokalen Extrema der Funktion f im Intervall $[0; 12]$ und prüfen Sie, ob es sich auch um absolute Extrema handelt.
 Tipp 23 	Ermitteln Sie die Wendestelle der Funktion g .
 Tipp 24 	Werten Sie die Textinformation aus und folgern Sie, wie man den Energiebedarf der Familie aus dem Leistungsbedarf erschließt.
 Tipp 25 	Überlegen Sie anhand der Abbildung 1, welche Fläche die von der Solaranlage gelieferte, „überschüssige“ Energie für den Gartenpool beschreibt.

Tipps 26	Vergleichen Sie die Funktionsgleichungen der Funktionenschar f_a und der Funktion f .
Tipps 27	Beachten Sie, dass die in einem Jahr aus der Solaranlage abrufbare Energie durch das Integral $\int_0^{12} f_a(t) dt$ berechnet werden kann.
Tipps 28	Durch welche Flächen in Abbildung 2 wird der Leistungsbedarf der Familie (ohne Heizung des Gartenpools!) dargestellt?
Tipps 29	Zeigen Sie, dass die Seiten des Vierecks OABC gleich lang sind.
Tipps 30	Die Oberfläche einer Pyramide lässt sich mit folgender Formel berechnen: $O_{\text{Pyr}} = A_G + A_M$. Dabei ist A_G die Grundfläche der Pyramide und A_M die Mantelfläche der Pyramide.
Tipps 31	Bestimmen Sie einen Normalenvektor von E.
Tipps 32	Führen Sie eine Punktprobe für B und C durch.
Tipps 33	Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt an der Abbildung der Aufgabenstellung.
Tipps 34	Bei dem Schnittgebilde handelt es sich um das Dreieck CBS.
Tipps 35	Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt an der Abbildung der Aufgabenstellung, indem Sie die Schnittfläche eintragen.
Tipps 36	Wie lauten die Koordinaten eines beliebigen Punktes P_r , der auf der Geraden g_{AS} liegt?
Tipps 37	Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt an der Abbildung der Aufgabenstellung. Der Punkt P liegt auf der Kante \overline{AS} .
Tipps 38	Die Pyramide ist symmetrisch zur Ebene H, die durch O, B und S bestimmt ist.
Tipps 39	Die Zufallsvariable X: „Anzahl der ,2.-Wahl'-Fliesen, die sich in der Packung A befinden“ ist binomialverteilt.
Tipps 40	Sie können entweder mit der Zufallsvariablen X: „Anzahl der ,2.-Wahl'-Fliesen, die sich in der Packung A befinden“ oder mit der Zufallsvariablen Y: „Anzahl der ,1.-Wahl'-Fliesen, die sich in der Packung A befinden“ das gegebene Ereignis beschreiben.
Tipps 41	Die Zufallsvariable Z: „Anzahl der ,1.-Wahl'-Fliesen, die sich in der Reihe befinden“ ist binomialverteilt.
Tipps 42	Die Zufallsvariable V: „Anzahl der Reihen, die nur ,1.-Wahl'-Fliesen enthalten“ ist binomialverteilt.
Tipps 43	Was sind die Voraussetzungen, dass eine Zufallsvariable binomialverteilt ist?
Tipps 44	Um welche Art eines Hypothesentests handelt es sich hier?
Tipps 45	Um welche Art eines Hypothesentests handelt es sich hier?
Tipps 46	Um welchen Fehler beim Testen einer Hypothese handelt es sich hier?
Tipps 47	Um welchen Fehler beim Testen einer Hypothese handelt es sich hier?
Tipps 48	Beachten Sie, dass es zwei Arten gibt, beim Testen einen Fehler zu begehen.
Tipps 49	Wie ist eine Vierfeldertafel aufgebaut? Wie viele Pfade hat das Baumdiagramm?



Tipp 50	Werten Sie die Vierfeldertafel bzw. das Baumdiagramm aus.
Tipp 51	Beachten Sie, dass Sie hier eine bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen müssen.
Tipp 52	Hier müssen Sie den gleichen Lösungsweg wie bei der Aufgabe c) (2) einschlagen. Allerdings müssen Sie zuerst einen Term mit variabler „Ausstortierwahrscheinlichkeit“ a aufstellen.

Folgende Tipps geben eine weitere Hilfestellung:

Tipp 1	Bilden Sie mithilfe der Produkt- und Kettenregel die 1. und 2. Ableitung.
Tipp 2	Klammern Sie den Faktor e^{-x} aus.
Tipp 3	Was steht in der dritten Ableitung in der Klammer vor dem Faktor e^{-x} ?
Tipp 4	Beachten Sie, dass der Berührungspunkt der Tangente sowohl auf der Tangente als auch auf dem Graphen liegt.
Tipp 5	Nutzen Sie, dass für jeden beliebigen Scharvertreter f_k gilt: Die Größe des im 1. Quadranten mit der x -Achse eingeschlossenen Flächenstücks wird durch das Integral $\int_0^{x_1} f_k(x) dx$ gegeben, wobei x_1 die positive Nullstelle ist.
Tipp 6	Führen Sie eine Punktprobe für P in der Gerade AB durch. Beachten Sie zusätzlich den konkreten Wert des Parameters der Geraden bei der Punktprobe.
Tipp 7	Die Strecke \overline{PD} teilt das Quadrat $ABCD$ in ein rechtwinkliges Dreieck APD und ein Trapez $PBCD$. Bestimmen Sie zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks APD .
Tipp 8	Beachten Sie einerseits den Unterschied zwischen Ziehen mit und ohne Zurücklegen und andererseits, wie man das Auftreten der beiden Buchstaben B und C zusammenfassen kann.
Tipp 9	Wenn A höchstens zweimal gezogen wird, bedeutet dies für die Verteilung $X \leq 2$. Entnehmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für $X = 0$, $X = 1$ und $X = 2$ der Tabelle.
Tipp 10	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $X \leq 3$ mithilfe der Tabellenwerte.
Tipp 11	Wenn der Erwartungswert μ eine natürliche Zahl ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = \mu)$ die größte unter den Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$.
Tipp 12	Berechnen Sie $N_1(3)$.
Tipp 13	Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $f(t) = 2000$.
Tipp 14	Was bedeutet es im Sachzusammenhang, dass auch r_1' stets positiv ist?
Tipp 15	Aus $r_1'(t) > 0$ folgt, dass r_1 streng monoton wachsend ist.
Tipp 16	Beachten Sie, dass die Funktionswerte von r_1 und r_2 das Anwachsen der Anzahl der Pantoffeltierchen beschreibt.
Tipp 17	Drücken Sie t vorübergehend mithilfe von a aus.
Tipp 18	Für den Zeitpunkt $t = 3$ gilt $N_1(3) = N_2(3)$. Dies ist der Startwert der gesuchten Bestandsfunktion N_2 .

Tip 19	Ermitteln Sie, welcher Term welches Flächenstück beschreibt. Zeichnen Sie die entsprechenden Flächenstücke verschiedenfarbig in die Abbildung.
Tip 20	Berechnen Sie $1000 \cdot e^{1,8}$ mit dem GTR.
Tip 21	Gehen Sie bei der Beschreibung auf die Bereiche ein, in denen die Graphen steigen bzw. fallen und bestimmen Sie eventuelle Minima und Maxima.
Tip 22	Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion f und verwenden Sie die notwendige und hinreichende Bedingung für lokale Extrema. Vergleichen Sie dann die y -Werte der lokalen Extrema mit den Werten von f an den Grenzen des Definitionsbereiches.
Tip 23	Berechnen Sie die Steigung der Funktion g an der Wendestelle und vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit den Steigungen der Funktion g an den Rändern des Definitionsbereiches.
Tip 24	Berechnen Sie: $\int_0^{12} g(t) dt$.
Tip 25	Berechnen Sie entweder: $\int_3^{9,5} (f(t) - g(t)) dt$ oder $\int_3^{9,5} f(t) dt - \int_3^{3,5} g(t) dt$.
Tip 26	Vergleichen Sie die Koeffizienten der Funktionsgleichungen der Funktionenschar f_a und der Funktion f .
Tip 27	Bestimmen Sie das Integral $\int_0^{12} f_a(t) dt$ mithilfe einer Stammfunktion $F_a(t)$ und untersuchen Sie, für welchen Parameter a der bei der Integration erhaltene Ergebnisterm maximal wird.
Tip 28	Durch welche Flächen in Abbildung 2 wird die von der Solaranlage bereitgestellte Energie für $t \leq 3$ bzw. $t \geq 9,5$ dargestellt?
Tip 29	Zeigen Sie, dass das Viereck OABC vier rechte Winkel besitzt.
Tip 30	Die Mantelfläche der Pyramide setzt sich aus vier Dreiecken zusammen. Diese sind gleichschenkelig und haben alle den gleichen Flächeninhalt.
Tip 31	Der Normalenvektor muss auf den Vektoren $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{BQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.
Tip 32	Für alle Werte $a \in \mathbb{R}$ muss sich eine wahre Aussage ergeben.
Tip 33	Die Kante \overline{CB} der Pyramide liegt in jeder Ebene E_a .
Tip 34	Führen Sie eine Punktprobe für S durch.
Tip 35	Die Ebene E teilt die Pyramide OABCS in eine „kleine Pyramide“ (ebenfalls mit der Spitze S) im oberen Bereich und einen „Restkörper“ im unteren Bereich. Für die „kleine Pyramide“ ist der Flächeninhalt der Grundfläche gegeben. Ihre Höhe ist der Abstand der Spitze S von der Ebene E . Dieser kann z. B. mittels der Hesse'schen Normalenform (HNF) berechnet werden.
Tip 36	Ein beliebiger Punkt der Geraden g_{AS} ist z. B. gegeben durch: $P_r(6 - 7r 8 - r 10r)$.
Tip 37	Der kürzeste Weg von einem Punkt zu einer Geraden ist das Lot von dem Punkt auf die Gerade.
Tip 38	Der Punkt S liegt auf der Kante \overline{CS} .

Tipp 39	Berechnen Sie $P(X = 2)$.
Tipp 40	Berechnen Sie entweder $P(X \geq 4)$ oder $P(Y \leq 16)$. Beachten Sie dabei die jeweilige Trefferwahrscheinlichkeit p bei den beiden binomialverteilten Zufallsvariablen.
Tipp 41	Berechnen Sie $P(Z = 5)$. Beachten Sie, dass sich fünf Fliesen in einer Reihe befinden.
Tipp 42	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(V \geq 1)$. Beachten Sie, dass es vier Reihen gibt.
Tipp 43	Dass die beiden Bedingungen für eine Binomialverteilung hier erfüllt sind, müssen Sie anhand des Aufgabentextes begründen.
Tipp 44	Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest. Wozu dient das Signifikanzniveau bei einem Hypothesentest?
Tipp 45	Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest. Beachten Sie, dass im Aufgabentext das Signifikanzniveau alternativ formuliert wurde.
Tipp 46	p_A ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 2. Art zu begehen, falls $p = 0,1$ zutrifft.
Tipp 47	p_B ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen, falls $p = 0,2$ zutrifft.
Tipp 48	Man irrt sich, wenn man einen Fehler 1. Art oder einen Fehler 2. Art begeht. Sie benötigen die Wahrscheinlichkeiten p_A und p_B , die Sie in b) (4) berechnet haben. Zeichnen Sie sich ein geeignetes Baumdiagramm, um sich die Situation zu veranschaulichen.
Tipp 49	Wählen Sie geeignete Abkürzungen für die auftretenden Ereignisse. Beachten Sie bei der Vierfeldertafel auch die Probe mit der Summe. Beachten Sie, dass Sie die richtigen Wahrscheinlichkeiten an die Äste des Baumdiagramms schreiben.
Tipp 50	In der Vierfeldertafel müssen Sie entweder die Summe einer Spalte oder einer Zeile berechnen. Im Baumdiagramm müssen Sie die Pfadregeln auf zwei der vier Pfade anwenden.
Tipp 51	Sie können alle benötigten Wahrscheinlichkeiten Ihrer Vierfeldertafel oder Ihrem Baumdiagramm entnehmen.
Tipp 52	Der allgemeine Term lautet: $\frac{0,1(1-a)}{0,9 \cdot 0,95 + 0,1(1-a)}$. Dieser Term muss kleiner als 0,01 sein. Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieser Ungleichung mithilfe des GTR oder mithilfe von Äquivalenzumformungen.

Folgende Tipps helfen, Lücken zu schließen:

Tipp 1	Bearbeiten Sie aus der Fertigkeit F 12 das Beispiel c) und die Aufgabe a).
Tipp 2	Das Vorzeichen vor dem Summand $3x$ wechselt von Ableitung zu Ableitung. Bearbeiten Sie aus der Fertigkeit F 12 das Beispiel c) und die Aufgabe b). Bearbeiten Sie aus der Fertigkeit F 14 die Aufgabe d).
Tipp 3	Die zweite Ableitung lautet $f''(x) = (3x - 7) \cdot e^{-x}$, die dritte Ableitung lautet $f'''(x) = -(3x - 10) \cdot e^{-x}$. Was folgt für $f^{(4)}$?
Tipp 4	Aus den beiden Bedingungen erhalten Sie ein lineares Gleichungssystem. Bearbeiten Sie aus F 8 das Beispiel a) und aus F 35 die Beispiele 1 und 3 und die Aufgabe 2.
Tipp 5	Bearbeiten Sie aus F 27 das Beispiel 4 sowie die Aufgaben 1 a) und 2 a) und aus F 49 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1. Behandeln Sie aus F 4 das Beispiel a).
Tipp 6	Bearbeiten Sie aus F 63 die Beispiele 1 und 2 und die Aufgabe.
Tipp 7	Der Flächeninhalt des Trapezes ergibt sich z. B. als Differenz aus dem Flächeninhalt des Quadrates und des Dreiecks. Bestimmen Sie nun das Verhältnis der Flächeninhalte. Bearbeiten Sie aus F 52 das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 8	Das Auftreten der beiden Buchstaben B und C kann man auch als „nicht A“ auffassen. Beim Ziehen mit Zurücklegen ändert sich die Wahrscheinlichkeit für den Buchstaben A nicht.
Tipp 9	Es gilt $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$.
Tipp 10	Lesen Sie den Abschnitt des Einführungstextes von F 100 zum Gegenereignis bei Binomialverteilungen. Bearbeiten Sie aus F 100 das Beispiel 3 und die Aufgaben 1 c), 1 e) und 2 a).
Tipp 11	Bearbeiten Sie aus F 102 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 12	Berechnen Sie $N_1(3) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot 3}$ näherungsweise mit dem GTR. Bearbeiten Sie aus der Fertigkeit F 45 das Beispiel 1 a).
Tipp 13	Lösen Sie die Gleichung $500 \cdot e^{0,6 \cdot t} = 2000$, indem Sie im zweiten Schritt logarithmieren. Lesen Sie den Text von der Fertigkeit F 5 und beachten Sie die Warnung 1 und bearbeiten Sie das Beispiel 1. Bearbeiten Sie aus der Fertigkeit F 45 das Beispiel 1 b).
Tipp 14	Lesen Sie den Text von den Fertigkeiten F 22 und F 46 .
Tipp 15	Am rechten Rand des Intervalls ist r_1 am größten.
Tipp 16	Bezugspunkt Ihrer Beschreibung muss der Zeitpunkt $t_1 = 3$ sein.
Tipp 17	Berechnen Sie $r_2(t) = r_2(3 + a) = r_1(3 - a) = r_1(3 - (t - 3)) = r_1(6 - t)$.
Tipp 18	Berechnen Sie $N_2(t) = N_1(t) + \int_3^t r(u) du$ mithilfe der gegebenen Stammfunktion. Lesen Sie den Text der Fertigkeit F 46 und bearbeiten Sie das Beispiel.

Tipp 19	Nutzen Sie die Punktsymmetrie des Graphen zum Punkt $P(3 N_1(3))$ aus.
Tipp 20	Es gilt $N_2(t) \approx 6049,65 - 500 \cdot e^{3,6-0,6t}$. Beachten Sie, dass jede Exponentialfunktion nur positive Funktionswerte besitzt.
Tipp 21	Stellen Sie bei Ihrer Beschreibung die zeitlichen Bereiche heraus, in denen der Leistungsbedarf der Familie die Leistung der Solaranlage übertrifft bzw. unterschreitet.
Tipp 22	Beachten Sie F 9 , F 10 , F 11 und bearbeiten Sie aus F 19 das Beispiel a) sowie die Aufgabe a). Bearbeiten Sie dann aus F 20 die Beispiele a) und c). Überlegen Sie, weshalb die Betrachtung der y-Werte am Rand des Definitionsbereiches nötig ist.
Tipp 23	Die stärkste Abnahme des Leistungsbedarfs der Familie liegt an der globalen Minimalstelle von g' vor. Diese globale Minimalstelle von g' kann nur an der Wendestelle von g oder an den Rändern des Definitionsbereiches vorliegen. Bearbeiten Sie daher aus F 21 Beispiel 1 und die Aufgabe a).
Tipp 24	Bearbeiten Sie aus F 24 das Beispiel 1 a) sowie die Aufgaben 1 a) und 1 c) und aus F 27 die Beispiele 3 und 4 sowie die Aufgaben 1 a), 2 a) und 2 c).
Tipp 25	Bearbeiten Sie aus F 28 das Beispiel 1.
Tipp 26	Zeigen Sie, dass $f_1(t) = f(t)$. Setzen Sie dann den Wert $a = 1$ in die Gleichung für w ein.
Tipp 27	Bearbeiten Sie aus F 24 das Beispiel 1 a) sowie die Aufgaben 1 a) und 1 c) und aus F 27 die Beispiele 3 und 4 sowie die Aufgaben 1 a), 2 a) und 2 c). Nutzen Sie dann F 19 zur Bestimmung des gesuchten Parameters a .
Tipp 28	Vergleichen Sie die Flächen, die der Graph von g mit den Graphen der Scharvertreter $f_{1,346}$ bzw. f_1 im Bereich $t \leq 3$ bzw. $t \geq 9,5$ einschließen. Arbeiten Sie den Einführungstext von F 27 durch.
Tipp 29	Bearbeiten Sie aus F 52 das Beispiel und die Aufgabe. Bearbeiten Sie aus F 58 das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 30	Für den Flächeninhalt des Dreiecks OAS gilt: $A_{\Delta OAS} = \frac{1}{2} \cdot \vec{OA} \cdot \vec{OAS} $. Bearbeiten Sie aus F 55 das Beispiel 2 und die Aufgabe.
Tipp 31	Bearbeiten Sie aus F 64 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1. Bearbeiten Sie aus F 59 die Beispiele 2 und 3 und die Aufgabe 2.
Tipp 32	Bearbeiten Sie aus F 65 das Beispiel 2 und die Aufgabe 2.
Tipp 33	Lesen Sie zu F 89 den Text vor Beispiel 1. Bearbeiten Sie dann das Beispiel 1 a) und das Beispiel 2.
Tipp 34	Bearbeiten Sie aus F 89 das Beispiel 1 b) und die Aufgabe 2 b).
Tipp 35	Bearbeiten Sie aus F 80 die Beispiele 1 und 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 36	Für die Vektoren \vec{OP}_r und \vec{AS} muss gelten: $\vec{OP}_r \cdot \vec{AS} = 0$. Aus dieser Bedingung erhalten Sie einen Wert für den Parameter r , vgl. F 58 .
Tipp 37	Die Länge des kürzesten Weges beträgt $ \vec{OP} + \vec{BP} = 2 \cdot \vec{OP} $. Wollen Sie allgemein den Abstand eines Punktes zu einer Geraden bestimmen, so bearbeiten Sie dazu aus F 81 die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben a) und b).

Tipp 38	Berechnen Sie N z. B. als Schnittpunkt der Geraden CS mit der zur x_1x_2 -Ebene parallelen Ebene zu $x_3 = \frac{10}{3}$. Bearbeiten Sie aus F 69 a das Beispiel und die Aufgabe 1 aus F 69 .
Tipp 39	Bearbeiten Sie aus F 100 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 a).
Tipp 40	Bearbeiten Sie aus F 100 die Beispiele 2 und 3 und die Aufgaben 1 b) bis 1 e) und 2 a) und 2 b).
Tipp 41	Bearbeiten Sie aus F 100 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 a).
Tipp 42	Bearbeiten Sie aus F 100 das Beispiel 3 und die Aufgaben 1 c), 1 e) und 2 a).
Tipp 43	Die beiden Bedingungen lauten: 1) Es gibt genau zwei mögliche Ausgänge. 2) Die Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht. Belegen Sie mithilfe des Aufgabentextes, dass diese beiden Bedingungen erfüllt sind.
Tipp 44	Lesen Sie den Einführungstext von F 104 .
Tipp 45	Bearbeiten Sie aus F 104 das Beispiel 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 46	Lesen Sie den Einführungstext von F 104 und bearbeiten Sie das Beispiel 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 47	Lesen Sie den Einführungstext von F 104 und bearbeiten Sie das Beispiel 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 48	Welche Pfade des Baumdiagramms repräsentieren das Irrren bei diesem Test? Denken Sie an die Pfadregeln. Lesen Sie den Einführungstext von F 104 .
Tipp 49	Das Baumdiagramm hat insgesamt vier Pfade. Bei der Vierfeldertafel muss die Summe 1 ergeben.
Tipp 50	Bearbeiten Sie aus F 95 das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 51	Für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ gilt: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
Tipp 52	Lesen Sie den Einführungstext von F 7 und bearbeiten Sie das Beispiel 2 und die Aufgabe 2.



Lösungen

Prüfungsteil A (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabe A1

a) $f'(x) = 3 \cdot e^{-x} + (3x - 1) \cdot (-e^{-x}) = (-3x + 4) \cdot e^{-x}$
 $f''(x) = -3 \cdot e^{-x} + (-3x + 4) \cdot (-e^{-x}) = (3x - 7) \cdot e^{-x}$

F 9

b) Auflistung der Funktion und der ersten beiden Ableitungen:

$$f(x) = (3x - 1) \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = (-3x + 4) \cdot e^{-x}$$

$$f''(x) = (3x - 7) \cdot e^{-x}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (3x - (3n + 1)) \cdot e^{-x}$$

F 12

F 14

Es lässt sich vermuten, dass sich das Vorzeichen von $3x$ in jeder Ableitung verändert. Der Betrag des absoluten Gliedes erhöht sich immer um drei und hat immer das entgegengesetzte Vorzeichen zu $3x$.

c) $f'''(x) = (-3x + 10) \cdot e^{-x}$; $f^{(4)}(x) = (3x - 13) \cdot e^{-x}$

Aufgabe A2

a) Es gilt: $f(x) = ax^3 + bx^2$ und $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

Die Steigung im Berührungspunkt $B(1 | f(1))$ der Tangente an den Graphen ist 6,5, d.h. $f'(1) = 6,5$, daraus ergibt sich:
 $3a + 2b = 6,5$.

Der Berührungspunkt $B(1 | f(1))$ liegt auf der Tangente, d.h.
 $f(1) = t(1) = 6,5 - 3 = 3,5$, daraus ergibt sich:
 $a + b = 3,5$.

F 35

Man erhält das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 3a + 2b = 6,5 \\ a + b = 3,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 6,5 \\ 2a + 2b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5 \\ 2a + 2b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5 \\ b = 4 \end{cases}$$

F 8

Die Funktionsgleichung der Funktion f ist $f(x) = -0,5x^3 + 4x^2$.

b) Zur Bestimmung der Nullstellen eines beliebigen Scharvertreters bestimmt man die Lösungen der Gleichung

F 49

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow -0,5x^3 + k \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-0,5x + k) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2k.$$

Der Flächeninhalt der im 1. Quadranten mit der x -Achse eingeschlossenen Fläche wird einerseits gegeben durch das Integral

$$\int_0^{2k} (-0,5x^3 + kx^2) dx = \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}kx^3 \right]_0^{2k} = -\frac{(2k)^4}{8} + k \frac{(2k)^3}{3} = -2k^4 + \frac{8}{3}k^4 = \frac{2}{3}k^4,$$

andererseits soll der Flächeninhalt 54 Flächeneinheiten betragen, d.h. es muss gelten:

$$\frac{2}{3}k^4 = 54 \Leftrightarrow k^4 = 81 \Leftrightarrow k_1 = 3 \vee k_2 = -3. \text{ Mit } k > 0 \text{ folgt:}$$

F 4

Der gesuchte Scharvertreter hat die Gleichung $f_3(x) = -0,5x^3 + 3x^2$.

Aufgabe A3

- a) Bestimmung einer Gleichung der Geraden AB:

$$g_{AB}: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}.$$

Punktprobe für $P(9 | 11 | 2)$:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Also liegt der Punkt P auf der Geraden } g_{AB}.$$

Da zusätzlich die Bedingung $0 \leq r \leq 1$ erfüllt ist, liegt P auf der Strecke \overline{AB} .

- b) Die Strecke \overline{PD} teilt das Quadrat ABCD in ein rechtwinkliges Dreieck APD und ein Trapez PBCD (vgl. Abbildung).

Für den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks APD gilt:

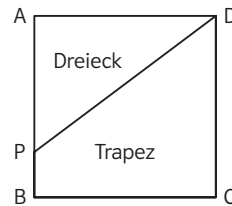
$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AP}| \cdot |\overline{AD}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150 \text{ [FE]}.$$

Das Quadrat ABCD hat den Flächeninhalt: $A_{\text{Quadrat}} = |\overline{AD}|^2 = 20^2 = 400 \text{ [FE]}$.

Das Trapez hat daher den Flächeninhalt: $A_{\text{Trapez}} = A_{\text{Quadrat}} - A_{\text{Dreieck}} = 250 \text{ [FE]}$.

Das Verhältnis beträgt: $\frac{A_{\text{Dreieck}}}{A_{\text{Trapez}}} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$.

Die Strecke \overline{PD} teilt das Quadrat ABCD im Verhältnis 3:5 [bzw. 5:3].



F 63

F 52

Aufgabe A4

- a) Man betrachtet nur zwei Ausgänge, nämlich „A“ (Treffer) und „nicht A“ (kein Treffer). Außerdem ist die Trefferwahrscheinlichkeit $p(A) = 0,3$ bei jeder Ziehung gleich, da mit Zurücklegen gezogen wird. Somit handelt es sich um eine binomialverteilte Zufallsvariable.

- b) (1) $P(X \leq 2) = 0,01 + 0,07 + 0,17 = 0,25$

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zweimal der Buchstabe A gezogen wird, beträgt 0,25.

- (2) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (0,01 + 0,07 + 0,17 + 0,24) = 1 - 0,49 = 0,51$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens viermal der Buchstabe A gezogen wird, beträgt 0,51.

- c) Für den Erwartungswert einer Binomialverteilung gilt $\mu = n \cdot p$.

Die Tabelle zeigt die drei Erwartungswerte für die drei gegebenen Werte von n:

n	12	15	18
μ	3,6	4,5	5,4

Da in der im Aufgabentext gegebenen Tabelle der Wert $P(X = 3)$ am größten ist, muss für den Erwartungswert $2 < \mu < 4$ gelten. Somit kommt nur $n = 12$ infrage.

F 100

F 100

F 101

F 102

Prüfungsteil B (mit Hilfsmittel)

Aufgabe B1

a) (1) $N_1(3) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot 3} = 500 \cdot e^{1,8} = 3024,82$ (d)

Nach 3 Tagen befinden sich etwa 3025 Pantoffeltierchen in der Nährlösung.

(2) $N_1(t) = 2000$
 $500 \cdot e^{0,6 \cdot t} = 2000$
 $e^{0,6 \cdot t} = 4$
 $0,6t = \ln(4)$
 $t = \frac{\ln(4)}{0,6}$
 $t = 2,31049$ (d)

Nach ungefähr 2,3 Tagen befinden sich 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung.

b) (1) $r_1(t) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot t} > 0$
 $r_1'(t) = 180 \cdot e^{0,6 \cdot t} > 0$

F 10

F 14

F 22

Die Anzahl der Pantoffeltierchen wächst streng monoton. Die Zunahme der Pantoffeltierchen pro Zeiteinheit wird mit der Zeit immer größer.

(2) Der Beobachtungszeitraum beträgt drei Tage.
 Der GTR liefert:

$$r_1(1) = 300 \cdot e^{0,6} = 546,636$$

$$r_1(2) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot 2} = 300 \cdot e^{1,2} = 996,035$$

$$r_1(3) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot 3} = 300 \cdot e^{1,8} = 1814,89$$

Die größte Wachstumsrate beträgt im angegebenen Zeitraum etwa 1815 Pantoffeltierchen pro Tag.

c) (1) $r_2(3+a) = r_1(3-a)$

Die Bedeutung dieser Formel: Die Zunahme der Anzahl der Pantoffeltierchen erfolgt symmetrisch bezüglich des Zeitpunkts $t_1 = 3$. Das heißt, diese Zunahme ist a Tage vor dem Zeitpunkt t_1 genauso groß wie a Tage nach dem Zeitpunkt t_1 .

(2) $3+a=t \Leftrightarrow a=t-3$

$$r_2(t) = r_2(3+a) = r_1(3-a) = r_1(3-(t-3)) = r_1(6-t) = 300 \cdot e^{0,6 \cdot (6-t)}$$

$$= 300 \cdot e^{3,6-0,6 \cdot t}$$

(3) $N_2(t) = N_1(3) + \int_3^t r_2(u) du$

$$= 500 \cdot e^{0,6 \cdot 3} + \left[300 \cdot \frac{1}{(-0,6)} \cdot e^{3,6-0,6 \cdot u} \right]_3^t$$

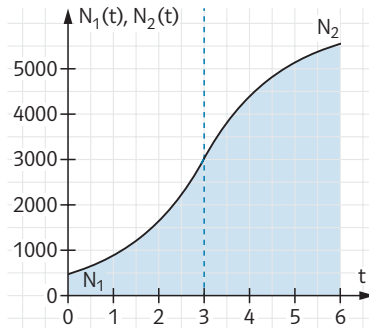
$$= 500 \cdot e^{1,8} + (-500 \cdot e^{3,6-0,6 \cdot t} + 500 \cdot e^{3,6-0,6 \cdot 3})$$

$$= 1000 \cdot e^{1,8} - 500 \cdot e^{3,6-0,6 \cdot t}$$

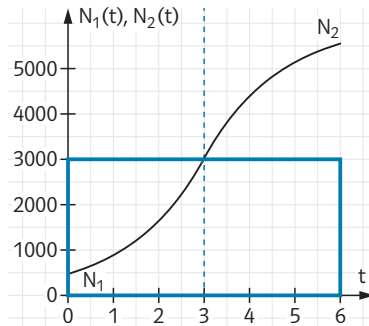
F 24

F 26

- (4) Das Integral $\int_0^3 N_1(t) dt + \int_3^6 N_2(t) dt$ beschreibt die Fläche unterhalb der Kurve (blaue Fläche).



- $6 \cdot N_1(3)$ kann als Inhalt des Rechtecks interpretiert werden:

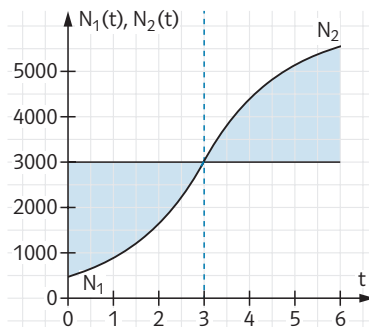


Die beiden nebenstehend farbig markierten Flächenstücke sind gleich groß:

die farbige Fläche im Intervall $[3; 6]$ passt genau auf die farbige Fläche im Intervall $[0; 3]$.

Dies ist durch die Punktsymmetrie des Graphen zu $(3 | N_1(3))$ begründet. Dadurch wird die Fläche des Rechtecks komplett ausgefüllt und damit ist die Gleichung

$$\int_0^3 N_1(t) dt + \int_3^6 N_2(t) dt = 6 \cdot N_1(3) \text{ erklärt.}$$



F 27

- (5) Der GTR liefert:

$$\begin{aligned} N_2(t) &= 1000 \cdot e^{1,8} - 500 \cdot e^{3,6-0,6 \cdot t} \\ &\approx 6049,65 - 500 \cdot e^{3,6-0,6 \cdot t} \\ &< 6050, \text{ denn } e^{3,6-0,6 \cdot t} > 0 \text{ für alle } t \end{aligned}$$

Die Anzahl der Pantoffeltierchen ist nie größer als 6050 durch die in der Gleichung gebildete Differenz.

Aufgabe B2

- a) (1) Zu Beginn des Kalenderjahres ist der Leistungsbedarf maximal, während die Leistung der Solaranlage minimal ist. Bis zur Jahresmitte wächst die Leistung der Solaranlage an, während der Leistungsbedarf der Familie in diesem Zeitraum zurückgeht. In der zweiten Jahreshälfte nimmt der Leistungsbedarf dann wieder zu, während die Leistung der Solaranlage abnimmt.

Von Anfang Januar bis etwa Ende März und von Mitte Oktober bis zum Jahresende übersteigt der Leistungsbedarf der Familie die Leistung der Solaranlage. Im Zeitraum von Anfang April bis Mitte Oktober ist die Leistung der Solaranlage dann größer als der Leistungsbedarf der Familie.

- (2) Es gilt: $f'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$ und $f''(t) = 12t^2 - 144t + 288$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema: $f'(t) = 0$

$$\begin{aligned} f'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t = 0 &\Leftrightarrow 4t(t^2 - 18t + 72) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 - 18t + 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6 \vee t = 12 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema: $f'(t) = 0 \wedge f''(t) \neq 0$

$$(f'(0) = 0 \wedge f''(0) = 288 > 0) \Rightarrow t = 0 \text{ ist lokale Minimalstelle von } f,$$

$$(f'(6) = 0 \wedge f''(6) = -144 < 0) \Rightarrow t = 6 \text{ ist lokale Maximalstelle von } f,$$

$$(f'(12) = 0 \wedge f''(12) = 288 > 0) \Rightarrow t = 12 \text{ ist lokale Minimalstelle von } f$$

d.h. $H(6|f(6))$ ist lokaler Hochpunkt, wobei $f(6) = 1696$.

Da $f(0) = 400 < 1696$ und $f(12) = 400 < 1696$, ist H im Intervall $[0; 12]$ der globale Hochpunkt:

Die maximale Leistung der Solaranlage ist nach 6 Monaten erreicht. Sie beträgt 1696 kWh/Monat.

- (3) Der Leistungsbedarf der Familie nimmt innerhalb des Kalenderjahres zu dem Zeitpunkt am stärksten ab, zu dem g' minimal und negativ ist. Somit ist der Zeitpunkt des globalen Minimums von g' , das im Intervall $[0; 12]$ angenommen wird, zu ermitteln. Dafür kommen nur die Wendestellen von g oder die Randstellen infrage.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } g'(t) &= -4t^3 + 78t^2 - 335t - 12,5 \text{ und} \\ g''(t) &= -12t^2 + 156t - 335 \text{ und} \\ g'''(t) &= -24t + 156 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema von g' bzw. Wendestellen von g : $g''(t) = 0$

$$\begin{aligned} g''(t) = -12t^2 + 156t - 335 = 0 &\Rightarrow t^2 - 13t + 27\frac{11}{12} = 0 \\ &\Rightarrow t \approx 2,714 \vee t = 10,286 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema von g' bzw. Wendestellen von g : $g''(t) = 0 \wedge g'''(t) \neq 0$

$$g''(2,714) = 0 \wedge g'''(2,714) = 90,864 > 0$$

$$\Rightarrow t = 2,714 \text{ ist lokale Minimalstelle von } g'$$

$$g''(10,286) = 0 \wedge g'''(10,286) = -90,864 < 0$$

$$\Rightarrow t = 10,286 \text{ ist lokale Maximalstelle von } g'$$

d.h. an der Stelle $t = 2,714$ hat die Funktion g' ein lokales Minimum.

F 9

F 10

F 11

F 19

F 20

F 21

F 19

Da $g'(0) = -12,5$, $g'(12) = 287,5$, $g'(2,714) = -427,1$ und $g'(10,286) = 441,1$, ist $t = 2,714$ sogar die globale Minimalstelle von g' , also:

Der Leistungsbedarf der Familie nimmt innerhalb des Kalenderjahres nach etwa 2,7 Monaten am stärksten ab.

- b) (1) Der Energiebedarf der Familie in dem Kalenderjahr lässt sich durch $\int_0^{12} g(t) dt$ ermitteln.

$$\int_0^{12} g(t) dt = \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{13}{2}t^4 - \frac{335}{6}t^3 - \frac{25}{4}t^2 + 2053t \right]_0^{12} \stackrel{\text{GTR}}{=} 12273,6$$

Der Energiebedarf beträgt somit etwa 12274 kWh \approx 12,3 MWh.

- (2) Laut Voraussetzung gilt $f(t) \geq g(t)$ für alle $3 \leq t \leq 9,5$. Somit gilt für die zu ermittelnde Energie:

$$\begin{aligned} \int_3^{9,5} (f(t) - g(t)) dt &= \int_3^{9,5} (2t^4 - 50t^3 + 311,5t^2 + 12,5t - 1653) dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{25}{2}t^4 + \frac{623}{6}t^3 + \frac{25}{4}t^2 - 1653t \right]_3^{9,5} \stackrel{\text{GTR}}{=} 6037,173 \end{aligned}$$

Durch die Solaranlage stehen im Intervall $[3; 9,5]$ etwa 6037 kWh Energie für die Heizung des Gartenpools zur Verfügung.

- c) (1) Durch den Vergleich der Leitkoeffizienten kommt für den Parameter nur $a = 1$ infrage.

Nachweis:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 1 \cdot (t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400) - 400 \cdot (1^2 - 1) \\ &= t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400 \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Mithilfe der angegebenen Formel ergibt sich für der Neigungswinkel $w = 116^\circ - 66^\circ \cdot 1 = 50^\circ$.

- (2) Die in dem Kalenderjahr abrufbare Energie aus der Solaranlage lässt sich in Abhängigkeit von dem Parameter a berechnen durch:

$$E(a) = \int_0^{12} f_a(t) dt = \left[\frac{1}{5}at^5 - 6at^4 + 48at^3 + 400at - 400 \cdot (a^2 - 1) \cdot t \right]_0^{12}$$

$$E(a) = 49766 \frac{2}{5}a - 124416a + 82944a + 4800a - 4800a^2 + 4800$$

$$E(a) = -4800a^2 + 13094 \frac{2}{5}a + 4800$$

E stellt eine quadratische Funktion mit der Variablen a dar, der zugehörige Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, d.h. ihr Scheitelpunkt ist ein globaler Hochpunkt.

Notwendige Bedingung für das lokale Extremum:

$$E'(a) = -9600a + 13094,4 = 0 \Rightarrow a = 1,364$$

Hinreichende Bedingung für das lokale Extremum:

$$E'(1,364) = 0 \wedge E''(1,364) = -9600 < 0 \Rightarrow a = 1,364 \text{ ist lokale und - da eine Parabel vorliegt - globale Maximalstelle von } E.$$

Die in einem Jahr aus der Solaranlage abrufbare Energie ist für $a = 1,364$ (d.h. $w \approx 26^\circ$) am größten.

F 20

F 24

F 27

F 28

F 24

F 24

F 27

F 19

- (3) Der Energiebedarf der Familie sowie die von der Solaranlage bereitgestellte Energie in den für die Fragestellung relevanten Zeitintervallen $t \leq 3$ bzw. $t \geq 9,5$ wird durch die jeweilige Fläche unterhalb des entsprechenden Graphen in Abbildung 2 repräsentiert.

Da für $t \leq 3$ und $t \geq 9,5$ die Fläche unterhalb des Graphen für eine um 50° geneigte Solaranlage größer ist als die für eine Solaranlage mit 26° Neigungswinkel, wird in diesen Zeitintervallen von der um 50° geneigten Solaranlage mehr Energie geliefert.

Daher:

Von der um 50° geneigten Solaranlage wird der Energiebedarf der Familie in den Zeitintervallen $t \leq 3$ und $t \geq 9,5$ besser gedeckt.

F 27

Aufgabe B3

- a) (1) Die Seiten des Vierecks sind gegeben durch die Vektoren:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{OC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\vec{OA} = \vec{CB}$ und $\vec{AB} = \vec{OC}$ ist das Viereck OABC in jedem Fall ein Parallelogramm.

Die Seiten sind gleich lang:

$$|\vec{OA}| = |\vec{CB}| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{OC}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$$

Damit ist das Viereck OABC in jedem Fall eine Raute.

Die Innenwinkel des Vierecks sind rechte Winkel:

Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich Null, so stehen die Vektoren senkrecht aufeinander.

$$\text{Es gilt: } \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = -48 + 48 = 0$$

Das Viereck besitzt einen rechten Winkel bei O.

Analog ergibt sich: $\vec{CO} \cdot \vec{CB} = \vec{BC} \cdot \vec{BA} = \vec{AO} \cdot \vec{AB} = 0$. Das Viereck besitzt daher ebenfalls rechte Winkel bei C, B und A.

Zusammenfassend ist das Viereck OABC damit ein Quadrat.

F 52

F 58

- (2) Die Oberfläche einer Pyramide lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$O_{\text{Pyr}} = A_G + A_M$. Dabei ist A_G die Grundfläche der Pyramide und A_M die Mantelfläche der Pyramide.

Hier beträgt der Flächeninhalt der Grundfläche, nämlich des Quadrates OABC:

$$A_G = |\vec{OA}|^2 = 10^2 = 100 \text{ [FE]}$$

Die Mantelfläche der Pyramide setzt sich aus vier Dreiecken zusammen, die zueinander kongruent sind.

Damit gilt: $A_M = 4 \cdot A_{\Delta OAS}$.

Da das Dreieck OAS gleichschenkelig ist, lässt sich sein Flächeninhalt folgendermaßen berechnen (vgl. Skizze):

$$A_{\Delta OAS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{M_{OA}S}|.$$

Dabei ist M_{OA} der Mittelpunkt der Strecke \overline{OA} :

$$M_{OA}(3 \mid 4 \mid 0).$$

Damit erhält man:

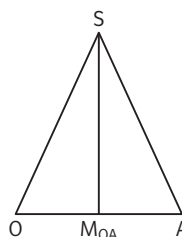
$$\overrightarrow{M_{OA}S} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{M_{OA}S}| = \sqrt{125} = 5 \cdot \sqrt{5} \text{ [LE]},$$

$$A_{\Delta OAS} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 25 \cdot \sqrt{5} \text{ [FE]}$$

Zusammenfassend ergibt sich daher für die Oberfläche der Pyramide:

$$O_{\text{Pyr}} = A_G + 4 \cdot A_{\Delta OAS} = 100 + 100 \cdot \sqrt{5} \approx 323,61 \text{ [FE]}$$

Die Oberfläche der Pyramide ist ca. 323,61 [FE].



F 55

- b) (1) Bestimmung einer Parametergleichung der Ebene E:

$$E: x = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BC} + s \cdot \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

Bestimmung einer Koordinatengleichung der Ebene E:

Einen Normalenvektor \vec{n} von E erhält man z. B. mithilfe des Vektorproduktes.

$$\vec{n}^* = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es gibt GTR-Modelle, die das Vektorprodukt direkt berechnen können.

Alternativ kann ein Normalenvektor auch mithilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden.

Somit lautet eine Koordinatengleichung von E: $-4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = d$

Führt man die Punktprobe für $Q(3 \mid 4 \mid 10)$ durch, so erhält man:

$$-4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 10 = d, \text{ also } d = 50.$$

Eine Koordinatengleichung von E lautet: $-4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 50$

- (2) Punktprobe für $B(-2 \mid 14 \mid 0)$ in E_a :

$$-4a \cdot (-2) + 3a \cdot 14 + 25 \cdot 0 = 50a \Leftrightarrow 50a = 50a$$

Dies ist wahr für alle $a \in \mathbb{R}$, also liegt der Punkt B in jeder Ebene E_a .

Punktprobe für $C(-8 \mid 6 \mid 0)$ in E_a :

$$-4a \cdot (-8) + 3a \cdot 6 + 25 \cdot 0 = 50a \Leftrightarrow 50a = 50a$$

Dies ist wahr für alle $a \in \mathbb{R}$, also liegt der Punkt C in jeder Ebene E_a .

F 64

F 59

F 65

- (3) Vorüberlegung: Da die Punkte B und C in jeder Ebene E_a liegen (aus **b**(2)), liegt zugleich die Kante \overline{CB} der Pyramide in jeder Ebene E_a .

F 89

Folgende Schnittgebilde können entstehen:

- Strecke \overline{CB} (für $a < 0$ oder $a > 10$)
- Quadrat OABC (für $a = 0$)
- Dreieck CBS (für $a = 10$) (vgl. dazu den nachfolgenden Aufgabenteil **b**(4))
- gleichschenkliges Trapez (für $0 < a < 10$)

Hinweis: Die zugehörigen Werte für $a \in \mathbb{R}$ sind hier zusätzlich in Klammern angegeben, sind aber zur Lösung des Aufgabenteils nicht erforderlich.

- (4) Gesucht ist der Wert von a , für den das Schnittgebilde der Ebene E_a und der Pyramide das Dreieck CBS ist (vgl. **b**(3)). Da die Punkte B und C in allen Ebenen E_a liegen, muss zusätzlich noch S in der Ebene enthalten sein.

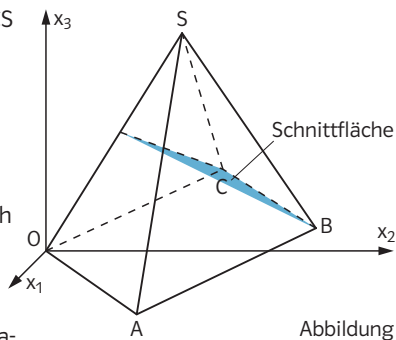
F 89

Punktprobe für S:

$$-4a \cdot (-1) + 3a \cdot 7 + 25 \cdot 10 = 50a \iff a = 10$$

Für $a = 10$ ist das Dreieck CBS das Schnittgebilde von Ebene und Pyramide.

- (5) Die Ebene E teilt die Pyramide OABCS in eine „kleine Pyramide“ (ebenfalls mit der Spitze S) im oberen Bereich und einen „Restkörper“ im unteren Bereich (vgl. Abbildung).



Volumen der „kleinen Pyramide“:
Das Volumen einer Pyramide lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h_{\text{Pyr}}$$

Dabei ist A_G die Grundfläche der Pyramide und h_{Pyr} die Höhe der Pyramide.

Hier ist der Flächeninhalt der Grundfläche gegeben: $A_G = \frac{400}{9} \cdot \sqrt{2}$ [FE].

Die Höhe der „kleinen Pyramide“ ist der Abstand der Spitze S von der Ebene E. Dieser kann z.B. mittels der Hesse'schen Normalenform (HNF) berechnet werden.

F 80

$$\text{HNF von E: } \frac{-4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 50}{\sqrt{50}} = 0$$

Einsetzen von $S(-1 | 7 | 10)$ in die linke Seite der HNF von H liefert den gesuchten Abstand:

$$d(S, E) = \frac{|-4 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 10 - 50|}{\sqrt{50}} = \frac{25}{\sqrt{50}} = \frac{25}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Für das Volumen der „kleinen Pyramide“ ergibt sich damit:

$$V_{\text{kleine Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{400}{9} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{2000}{27}$$
 [VE].

Das Volumen des „Restkörpers“ erhält man als Differenz der Volumina der vollständigen Pyramide OABCS und der „kleinen Pyramide“.

Das Volumen der Pyramide OABCs beträgt:

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10 = \frac{1000}{3} \text{ [VE]}.$$

Für den Restkörper ergibt sich:

$$V_{\text{Restkörper}} = V_{\text{Pyr}} - V_{\text{kleine Pyr}} = \frac{1000}{3} - \frac{2000}{27} = \frac{7000}{27} \text{ [VE]}.$$

Ein Verhältnis der berechneten Volumina beträgt:

$$\frac{V_{\text{kleine Pyr}}}{V_{\text{Restkörper}}} = \frac{\frac{2000}{27}}{\frac{7000}{27}} = \frac{2}{7}. \quad (\text{Bemerkung: Auch der Kehrwert ist möglich.})$$

Ein Verhältnis der Rauminhalte der beiden Teilkörper beträgt 2 : 7.

- c) (1) Bestimmung einer Gleichung der Geraden AS:

$$g_{\text{AS}}: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}.$$

Ein beliebiger Punkt der Geraden g_{AS} ist gegeben durch:

$$P_r(6-7r \mid 8-r \mid 10r).$$

Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich Null, so stehen die Vektoren senkrecht aufeinander. Hier muss also gelten:

$$\begin{aligned} \vec{OP}_r \cdot \vec{AS} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6-7r \\ 8-r \\ 10r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -42 + 49r - 8 + r + 100r = 0 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Man erhält: } P_{\frac{1}{3}}\left(6-7 \cdot \frac{1}{3} \mid 8-\frac{1}{3} \mid 10 \cdot \frac{1}{3}\right) = P_{\frac{1}{3}}\left(\frac{11}{3} \mid \frac{23}{3} \mid \frac{10}{3}\right).$$

Alternativ liefert der Ansatz $\vec{BP}_r \cdot \vec{AS} = 0$ aufgrund der Kongruenz der Seitendreiecke der Pyramide denselben Punkt P.

Der Punkt P hat die Koordinaten $P\left(\frac{11}{3} \mid \frac{23}{3} \mid \frac{10}{3}\right)$.

- (2) Aus c)(1) ergibt sich, dass der Punkt P auf der Kante \overline{AS} liegt.

Weiterhin sind die Strecken \overline{OP} und \overline{BP} senkrecht zu \overline{AS} , d.h. P ist Fußpunkt des Lotes von O auf g_{AS} und Fußpunkt des Lotes von B auf g_{AS} . Damit ist der Streckenzug \overline{OPB} der kürzeste Weg von O nach B über die Dreiecksflächen OAS und ABS.

Aufgrund der Symmetrie der Pyramide zur Ebene OBS, gibt es einen gleich langen (aber keinen kürzeren!) Weg über die Dreiecksflächen OCS und CBS.

Die Länge des kürzesten Weges ist:

$$\begin{aligned} |\overline{OPB}| &= |\overline{OP}| + |\overline{PB}| = 2 \cdot |\overline{OP}| = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(\frac{23}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{750}{9}} = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{30} \text{ [LE]}. \end{aligned}$$

Die Länge des Streckenzuges beträgt $\frac{10}{3} \cdot \sqrt{30} \approx 18,26$ [LE].

- (3) Aufgrund der Symmetrie der Pyramide zur Ebene OBS, gibt es einen gleich langen Streckenzug \overline{ONB} über die Dreiecksflächen OCS und CBS.

Der Punkt N liegt dabei auf der Kante \overline{CS} . Seine Koordinaten erhält man aufgrund der vorliegenden Symmetrie analog zu den Koordinaten von P:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} \\ \frac{19}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann N auch als Schnittpunkt der Geraden CS mit der zur x_1x_2 -Ebene parallelen Ebene zu $x_3 = \frac{10}{3}$ berechnet werden.

Der Punkt N hat die Koordinaten: $N \left(-\frac{17}{3} \mid \frac{19}{3} \mid \frac{10}{3} \right)$.

F 69

Aufgabe B4

- a) Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der „2.-Wahl“-Fliesen, die sich in einer Packung A-Fliesen befindet. X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,1$. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden jeweils mithilfe der GTR-Befehle für die Einzelwahrscheinlichkeit bzw. kumulierte Wahrscheinlichkeit berechnet.

- (1) $P(X = 2) = 0,28517... \approx 0,2852$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei „2.-Wahl“-Fliesen in einer Packung A-Fliesen enthalten sind, beträgt ca. 0,2852 (28,52%).

F 100

- (2) 80% von 20 sind 16. Maximal 16 Fliesen sollen die Qualität „1. Wahl“ haben. Dies ist äquivalent dazu, dass mindestens vier Fliesen die Qualität „2. Wahl“ besitzen. Gesucht ist demnach die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 4)$.
 $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,86704... \approx 0,1330$

Die Wahrscheinlichkeit, dass maximal 80% der Fliesen in einer Packung A-Fliesen die Qualität „1. Wahl“ haben, beträgt ca. 0,1330 (13,30%).

F 100

Alternativer Lösungsweg:

Die Zufallsvariable Y steht für die Anzahl der „1.-Wahl“-Fliesen, die sich in einer Packung A-Fliesen befindet. Y ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,9$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(Y \leq 16)$.

$$P(Y \leq 16) = 0,13295... \approx 0,1330$$

F 100

- (3) Da sich in einer Reihe fünf Fliesen befinden, müssen alle fünf Fliesen die Qualität „1. Wahl“ haben. Die Zufallsvariable Z steht für die Anzahl der „1.-Wahl“-Fliesen, die sich in der Reihe befinden. Z ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0,8$.
 Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 5)$.
 $P(Z = 5) = \tilde{p} = 0,32768 \approx 0,3277$

Die Wahrscheinlichkeit \tilde{p} , dass alle Fliesen in einer Reihe Fliesen der Qualität „1. Wahl“ sind, beträgt ca. 0,3277 (32,77%).

F 100

Alternativer Lösungsweg:

Man kann die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 5)$ auch elementar mithilfe der Pfadregeln bestimmen: $P(Z = 5) = 0,8^5 = 0,32768 \approx 0,3277$

- (4) Die Zufallsvariable V steht für die Anzahl der Reihen, die nur „1. Wahl“-Fliesen enthalten.

V ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $\tilde{p} = 0,32768$.

$$P(V \geq 1) = 1 - P(V = 0) = 1 - 0,20431\dots \approx 0,7957$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur Fliesen der Qualität „1. Wahl“ enthält, beträgt ca. 0,7957 (79,57%).

F 100

- b) (1) Alle Fliesen auf der Palette wurden von derselben Maschine hergestellt. Somit enthalten sie entweder nur A-Fliesen oder nur B-Fliesen. Die Qualität der Fliesen, die von derselben Maschine hergestellt wurden, ist stochastisch unabhängig voneinander. Somit ist jede der insgesamt 10000 Fliesen auf der Palette mit derselben Wahrscheinlichkeit eine Fliese mit der Qualität „2. Wahl“. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt entweder 0,1 (bei A-Fliesen) oder 0,2 (bei B-Fliesen).

Somit sind die beiden Bedingungen für eine binomialverteilte Zufallsvariable erfüllt:

- 1) Es gibt genau zwei mögliche Ausgänge (Fliese „1. Wahl“ oder Fliese „2. Wahl“).
- 2) Die Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht.

- (2) Die Nullhypothese H_0 geht davon aus, dass es sich um eine Palette mit B-Fliesen handelt. Man will das Risiko, irrtümlicherweise eine Palette mit B-Fliesen zu kaufen, begrenzen. Durch die Wahl der Nullhypothese $H_0: p \geq 0,2$ kann man dieses Risiko durch das vorgegebene Signifikanzniveau α begrenzen.

Das Signifikanzniveau begrenzt die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen. Einen Fehler 1. Art würde man bei dieser Nullhypothese begehen, falls man die Nullhypothese verwirft und somit vermutet, dass es sich wohl um eine Palette mit A-Fliesen handelt, obwohl es in Wirklichkeit eine Palette mit B-Fliesen ist.

F 104

- (3) In diesem Fall führt man einen linksseitigen Signifikanztest durch. Nullhypothese $H_0: p \geq 0,2$; Gegenhypothese $H_1: p < 0,2$
 Stichprobenumfang $n = 100$; Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$
 X ist die Anzahl der „2.-Wahl“-Fliesen in der Stichprobe.
 Im Extremfall ist X binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,2$.
 Gesucht ist die größte Zahl g , für die gilt: $P(X \leq g) \leq 0,05$.
 Man erstellt mit dem GTR eine Tabelle für den Term $P(X \leq g)$.

g	...	12	13	14	...
$P(X \leq g)$...	0,0253	0,0469	0,0804	...

Es gilt $g = 13$.

Die Entscheidungsregel lautet: Wenn man in der Stichprobe höchstens 13 „2.-Wahl“-Fliesen findet, dann wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

F 104

Hinweis:

Falls der GTR über einen Inversen Binomialbefehl verfügt, dann kann man die größte Zahl g , die die Ungleichung $P(X \leq g) \leq 0,05$ erfüllt, mit diesem Befehl ohne Wertetabelle bestimmen.

- (4) Berechnung von p_A :
 Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt, falls sich mindestens 14 „2. Wahl“-Fliesen in der Stichprobe befinden. Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,1$.
 $P(X \geq 14) = 1 - P(X \leq 13) = 1 - 0,87612... \approx 0,1239$

Die Wahrscheinlichkeit p_A , H_0 irrtümlicherweise nicht abzulehnen, beträgt hier ca. 0,1239 (12,39%).

Hinweis:

Die Wahrscheinlichkeit p_A ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 2. Art zu begehen, falls $p = 0,1$ zutreffend ist.

Berechnung von p_B :

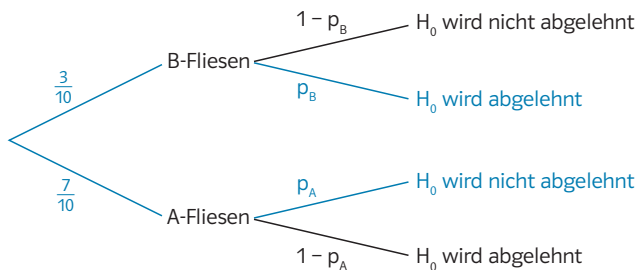
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls sich höchstens 13 „2. Wahl“-Fliesen in der Stichprobe befinden. Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,2$.
 $P(X \leq 13) = 0,04691... \approx 0,0469$

Die Wahrscheinlichkeit p_B , H_0 irrtümlicherweise abzulehnen, beträgt hier ca. 0,0469 (4,69%).

Hinweis:

Die Wahrscheinlichkeit p_B ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen, falls $p = 0,2$ zutreffend ist.

- (5) Folgendes Baumdiagramm veranschaulicht die Situation:



Man irrt sich bei diesem Test, wenn man H_0 ablehnt, obwohl es tatsächlich B-Fliesen sind oder wenn man H_0 nicht ablehnt, obwohl es A-Fliesen sind. Die beiden Pfade, die einen Irrtum anzeigen, sind farbig markiert. Die gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet man mithilfe der Pfadregeln.

$$P_{\text{ges}} = 0,3 \cdot p_B + 0,7 \cdot p_A = 0,10078... \approx 0,1008$$

Die gesamte Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt hier ca. 0,1008 (10,08%).

F 104

F 100

F 104

F 100

F 104

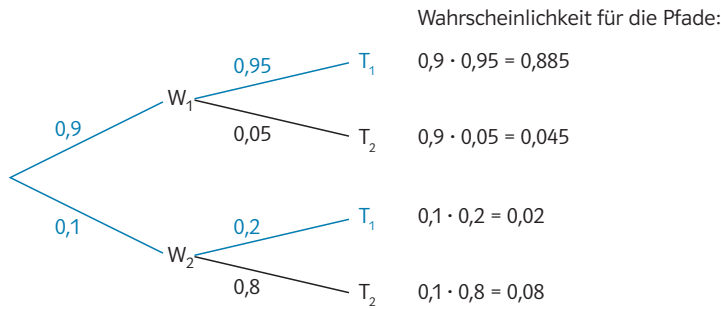
F 95

- c) (1) Folgende Abkürzungen werden für die Ereignisse verwendet:
 W_1 : die Fliese ist eine „1.-Wahl“-Fliese
 W_2 : die Fliese ist eine „2.-Wahl“-Fliese
 T_1 : die Fliese ist laut Test eine „1.-Wahl“-Fliese
 T_2 : die Fliese ist laut Test eine „2.-Wahl“-Fliese

Vierfeldertafel:

	W_1	W_2	Summe
T_1	$0,9 \cdot 0,95 = 0,855$	$0,1 \cdot 0,2 = 0,02$	0,875
T_2	$0,9 \cdot 0,05 = 0,045$	$0,1 \cdot 0,8 = 0,08$	0,125
Summe	0,9	0,1	1

Alternative: Baumdiagramm



Die beiden günstigen Pfade für das Ereignis T_1 „die Fliese wird als „1.-Wahl“-Fliese eingestuft“ sind farbig markiert. Die Wahrscheinlichkeit $P(T_1)$ berechnet man mithilfe der Pfadregeln.
 $P(T_1) = 0,9 \cdot 0,95 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,855 + 0,02 = 0,875$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Testgerät eine Fliese als „1.-Wahl“-Fliese eingestuft, beträgt 0,875 (87,5%).

- (2) Die Fliesen, die nicht aussortiert wurden, sind vom Testgerät als „1.-Wahl“-Fliese eingestuft worden. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies eintritt, ist $P(T_1) = 0,875$ (siehe (1)).
 Die Wahrscheinlichkeit, dass eine „2.-Wahl“-Fliese nicht aussortiert wird, beträgt 0,02 (siehe (1)).

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P_{T_1}(W_2) = \frac{P(T_1 \cap W_2)}{P(T_1)} = \frac{0,02}{0,875} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{175} \approx 0,0229$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, eine „2.-Wahl“-Fliese ist, beträgt ca. 0,0229 (2,29%).

- (3) Man wiederholt den Rechenweg für (2) diesmal mit variabler „Aussortierwahrscheinlichkeit“ a .

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P_{T_1}(W_2) = \frac{0,1(1-a)}{0,9 \cdot 0,95 + 0,1(1-a)} = \frac{0,1 - 0,1a}{0,855 + 0,1 - 0,1a} = \frac{0,1 - 0,1a}{0,955 - 0,1a}$$

F 95

F 95

Es soll gelten $P_{T_1}(W_2) < 0,01$. Dies führt zur Ungleichung $\frac{0,1 - 0,1a}{0,955 - 0,1a} < 0,01$.

Man löst die Gleichung für den Grenzfall $\frac{0,1 - 0,1a}{0,955 - 0,1a} = 0,01$ mit dem Solver des GTR.

Der GTR liefert als einzige Lösung $a_1 = \frac{201}{220} \approx 0,9136$.

Da mit einer kleineren „Aussortierwahrscheinlichkeit“ als a_1 die Bedingung nicht erfüllt ist (siehe (2)), muss die „Aussortierwahrscheinlichkeit“ größer als a_1 sein.

Wenn die „Aussortierwahrscheinlichkeit“ größer als $\frac{201}{220} \approx 0,9136$ ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, eine „2.-Wahl“-Fliese ist, unter 1%.

Hinweis:

Die Ungleichung $\frac{0,1 - 0,1a}{0,955 - 0,1a} < 0,01$ (I) kann man auch ohne GTR exakt lösen:

Zunächst multipliziert man die Ungleichung (I) auf beiden Seiten mit 100, um die Nachkommastellen zu reduzieren.

Man erhält die Ungleichung $\frac{10 - 10a}{0,955 - 0,1a} < 1$ (II).

Da $0 < a < 1$ gilt, ist der Nenner des Bruchs stets positiv. Man multipliziert (II) auf beiden Seiten mit $0,955 - 0,1a$ und erhält:

$$10 - 10a < 0,955 - 0,1a \quad (\text{III})$$

Addiert man nun auf beiden Seiten von (III) $10a$ und subtrahiert auf beiden Seiten $0,955$ dann folgt $9,045 < 9,9a$ (IV).

Dividiert man beide Seiten von (IV) durch $9,9$ erhält man

$$a > \frac{9,045}{9,9} = \frac{9045}{9900} = \frac{201}{220} \approx 0,9136.$$

F 3

F 7

F 7