Abitur 2016

Aufgaben

Pflichtteil

Aufgabe 1

2 VP Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (5x+1) \cdot \sin(x^2)$. — Tipp 1

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3}$.

2 VP Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(3) = 1$. — Tipp 2

Aufgabe 3

3 VP Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$. — Tipp 3

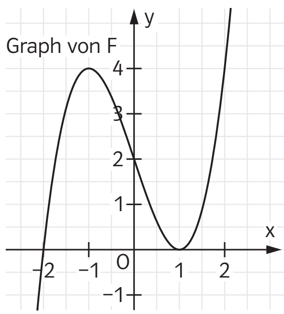
Aufgabe 4

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt.

3 VP Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist. — Tipp 4

Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.



Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

5 VP (4) $f(F(-2)) > 0$ — Tipp 5

Aufgabe 6

Gegeben ist die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind. Tipp 6

b) Die Gerade h verläuft durch $Q(8\,|\,5\,|\,10)$ und schneidet g orthogonal.
5 VP Bestimmen Sie eine Gleichung von h. Tipp 7

Aufgabe 7

Gegeben ist die Ebene $E\colon\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 28$.

Es gibt zwei zu E parallele Ebenen F und G, die vom Ursprung den Abstand 2 haben.
3 VP Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von F und G. Tipp 8

Aufgabe 8

Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 bei einmaligem Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,3	0,2

a) Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Geben Sie zwei verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils 0,7 beträgt. Tipp 9

b) An dem Glücksrad sollen nur die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das folgende Spiel fair ist:
Für einen Einsatz von 2,50 € darf man einmal am Glücksrad drehen.
Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in Euro an.
Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen
4 VP 1 und 2. Tipp 10

Aufgabe 9

Von zwei Kugeln K_1 und K_2 sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie die Radien r_1 und r_2 bekannt. Die Kugeln berühren einander von außen im Punkt B.

3 VP Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man B bestimmen kann. Tipp 11

Wahlteil **Analysis**

Aufgabe A 1.1

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6$, die für $-1 \leqq x \leqq 5$ modellhaft das Profil eines Geländequerschnitts beschreibt.

Die positive x-Achse weist nach Osten, f(x) gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an (1 Längeneinheit entspricht 100 m).

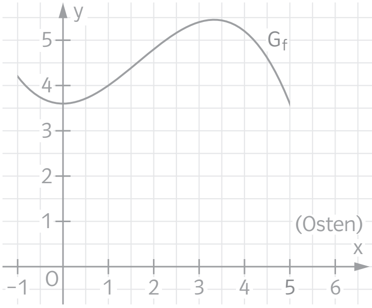


Abbildung 1

a) Auf welcher Höhe liegt der höchste Punkt des Profils? — Tipp 12

In dem Tal westlich dieses Punktes befindet sich ein See, der im Geländequerschnitt an seiner tiefsten Stelle 40 m tief ist.

Bestimmen Sie näherungsweise die Breite des Sees im Geländequerschnitt. — Tipp 13

Ab einer Hangneigung von 30° besteht die Gefahr, dass sich Lawinen lösen.

Besteht an der steilsten Stelle des Profils zwischen See und höchstem Punkt Lawinengefahr?

5 VP — Tipp 14

b) Am Hang zwischen dem höchsten Punkt und dem westlich davon gelegenen Tal befindet sich ein in den Hang gebautes Gebäude, dessen rechteckige Seitenwand im Geländequerschnitt liegt.

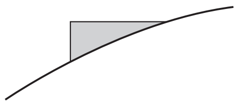


Abbildung 2

Die Abbildung 2 zeigt den sichtbaren Teil dieser Seitenwand.

Die Oberkante der Wand trifft den Geländequerschnitt im Punkt (3 | 5,4).

Von dieser Kante sind 28 m sichtbar.

Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils größer als $130\,m^2$ ist.

3 VP — Tipp 15

c) Der weitere Verlauf des Profils nach Osten hin kann durch eine Parabel zweiter Ordnung modelliert werden, die sich ohne Knick an den Graphen von f anschließt. Ihr Scheitel liegt bei $x = 6$ und beschreibt den tiefsten Punkt eines benachbarten Tals.

Auf welcher Höhe befindet sich dieser Punkt?

4 VP — Tipp 16

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$, deren Graph symmetrisch zur y-Achse ist. Es gibt einen Kreis, der den Graphen von h in dessen Schnittpunkten mit der x-Achse berührt.

3 VP Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieses Kreises. — Tipp 17

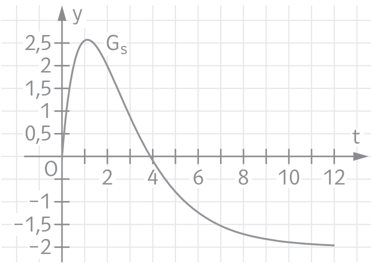
Aufgabe A 2.1

In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10.00 Uhr an einer Messstelle 150 cm.
Die momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe wird beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(t) = 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 2;\quad 0 \leqq t \leqq 12$$

(t in Stunden nach 10.00 Uhr, s(t) in Zentimeter pro Stunde).

Die Abbildung zeigt den Graph von s für $0 \leqq t \leqq 12$.



a) Bestimmen Sie rechnerisch die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe. Tipp 18
Ermitteln Sie näherungsweise aus dem Graphen von s den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schneehöhe größer als 2 cm pro Stunde ist. Tipp 19
4 VP Wie hoch liegt der Schnee um 12.00 Uhr? Tipp 20

b) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t beschreibt. Tipp 21
3 VP Begründen Sie ohne Rechnung, dass es einen Zeitpunkt t^* gibt, zu dem die Schneehöhe genauso hoch ist, wie zum Zeitpunkt $t = 2$. Tipp 22

c) Um 12.30 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen. Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die momentane Änderungsrate der Schneehöhe an der Messstelle um 1 cm pro Stunde erhöht.
Ermitteln Sie näherungsweise aus dem Graphen, um wie viele Stunden sich durch diese Maßnahme der Zeitraum, in dem die Schneehöhe zunimmt, verlängert. Tipp 23
4 VP Wie viele Zentimeter Schnee pro Stunde müssten die Schneekanonen ab 12.30 Uhr liefern, damit um 18.00 Uhr die Schneehöhe 160 cm betragen würde? Tipp 24

Aufgabe A 2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion g_a gegeben durch

$$g_a(x) = a \cdot \cos(a \cdot x);\quad -\frac{\pi}{2a} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2a}.$$

Der Graph von g_a schneidet die y-Achse in einem Punkt. Die Strecke von diesem Punkt zum Ursprung ist die Diagonale einer Raute. Die beiden weiteren Eckpunkte der Raute liegen auf dem Graphen von g_a.

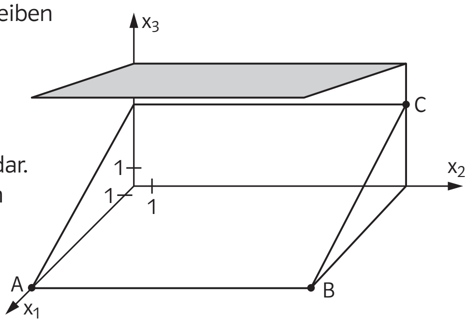
2 VP **a)** Bestimmen Sie für $a = 3$ die Längen der beiden Diagonalen dieser Raute. Tipp 25

2 VP **b)** Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Raute ein Quadrat ist. Tipp 26

Wahlteil **Analytische Geometrie / Stochastik**

Aufgabe B 1.1

In einem Koordinatensystem beschreiben die Punkte $A(15|0|0)$, $B(15|20|0)$ und $C(0|20|6)$ Eckpunkte der rechteckigen Nutzfläche einer Tribüne (alle Koordinatenangaben in Meter). Die x_1x_2-Ebene stellt den Erdboden dar. Die Eckpunkte der Dachfläche liegen vertikal über den Eckpunkten der Nutzfläche. Die Dachfläche liegt in der durch $E: x_1 - 3x_3 = -27$ beschriebenen Ebene (siehe Abbildung).



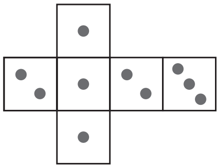
a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt. Tipp 27
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Nutzfläche gegen den Erdboden. Tipp 28
4 VP Ermitteln Sie den Inhalt der Nutzfläche. Tipp 29

b) Aus Sicherheitsgründen muss die senkrecht zum Erdboden verlaufende Rückwand zwischen der Nutzfläche und der Dachfläche mindestens 2,5 m hoch sein.
Überprüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. Tipp 30

Zur Installation von Lautsprechern wird eine 5,2 m lange, senkrecht zum Erdboden verlaufende Stütze montiert. Ihre Enden werden an der Kante BC und am Dach der Tribüne fixiert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes auf der Kante BC, in dem das
4 VP untere Ende der Stütze fixiert wird. Tipp 31

Aufgabe B 1.2

Bei einem Spiel wird ein idealer Würfel verwendet, dessen Netz in der Abbildung dargestellt ist.



a) Der Würfel wird 2-mal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme der beiden Würfe 3 beträgt. Tipp 32
Nun wird der Würfel 12-mal geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens 4-mal die Augenzahl 2 zeigt. Tipp 33

Die Beschriftung des Würfels soll so geändert werden, dass man bei 12-maligem Werfen des Würfels mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens 4-mal die Augenzahl 3 erhält.
Auf wie vielen Seiten des Würfels muss dann die Augenzahl 3 mindestens
4 VP stehen? Tipp 34

b) Ein Spieler hat die Vermutung, dass der ursprüngliche Würfel zu oft die Augenzahl 3 zeigt. Die Nullhypothese
H_0: „Die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 3 beträgt höchstens $\frac{1}{6}$."
soll durch eine Stichprobe mit 100 Würfen auf einem Signifikanzniveau von 1 % getestet werden.
3 VP Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten. Tipp 35

Aufgabe B 2.1

Die Punkte A (0 | − 6 | 0), B (6 | 0 | 0), C (0 | 6 | 0) und S (0 | 0 | 5) sind die Eckpunkte der Pyramide ABCS. Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt der Kante AS und M_2 ist der Mittelpunkt der Kante CS. Die Ebene E verläuft durch M_1, M_2 und B.

a) Die Ebene E schneidet die Pyramide in einer Schnittfläche.
Stellen Sie Pyramide und Schnittfläche in einem Koordinatensystem dar. Tipp 36
Berechnen Sie den Umfang der Schnittfläche. Tipp 37
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
4 VP (Teilergebnis: $E:\ 5x_1 + 12x_3 = 30$) Tipp 38

b) Der Punkt Q liegt auf der Kante BS und bildet mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck.
3 VP Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q. Tipp 39

c) Der Punkt Z liegt in der x_1x_3-Ebene und im Innern der Pyramide ABCS.
Er hat von der Grundfläche ABC, der Seitenfläche ACS und von E den gleichen Abstand.
3 VP Bestimmen Sie die Koordinaten von Z. Tipp 40

Aufgabe B 2.2

Eine Tanzgruppe besteht aus 8 Anfängerpaaren und 4 Fortgeschrittenenpaaren. Aus der Erfahrung vergangener Jahre weiß man, dass Anfängerpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % bei den abendlichen Tanzstunden anwesend sind, Fortgeschrittenenpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Man geht davon aus, dass die Entscheidungen der Tanzpaare über die Teilnahme an der Tanzstunde voneinander unabhängig sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind. Tipp 41
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind. Tipp 42
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens
5 VP 11 Paare anwesend sind? Tipp 43

Tipps

Folgende Tipps geben eine erste Hilfestellung:

Tipp 1	Die Funktion ist das Produkt zweier Funktionen. Verwenden Sie daher die Produktregel.
Tipp 2	Schreiben Sie den Funktionsterm von f unter Verwendung einer Potenz mit negativer Hochzahl.
Tipp 3	Multiplizieren Sie die Gleichung mit e^x, $e^x \neq 0$. Dies ist eine Äquivalenzumformung.
Tipp 4	Bestimmen Sie zuerst die Wendestelle.
Tipp 5	(1) F(1) können Sie am Graphen ablesen. (2) Das Integral können Sie durch Funktionswerte der Stammfunktion F ausdrücken. (3) Eine Nullstelle von F″ ist eine Nullstelle von f′. (4) F(−2) können Sie am Graphen ablesen.
Tipp 6	Kann $P(p\,\vert\,p\,\vert\,p)$ ein solcher Punkt sein?
Tipp 7	Veranschaulichen Sie sich die Situation durch eine Skizze. Beachten Sie, dass Q nicht auf g liegt.
Tipp 8	Die Ebenen E, F und G gehören zu einer Ebenenschar E_a. Geben Sie die Gleichung dieser Ebenenschar an.
Tipp 9	Wie können Sie 0,7 als Summe zweier gegebener Wahrscheinlichkeiten darstellen?
Tipp 10	Was wissen Sie über die Summe der Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2?
Tipp 11	Fertigen Sie eine Skizze an. Tragen Sie alle Längen, Punkte und Vektoren ein, die für die Vorgehensweise eine Rolle spielen können.
Tipp 12	Denken Sie an die notwendige Bedingung für Extrema.
Tipp 13	Welche Koordinaten hat der tiefste Punkt des Graphen G_f? Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, welche im Modell die Seeoberfläche beschreibt.
Tipp 14	Die Steigung des Geländeprofils wird durch die Steigung des Graphen beschrieben.
Tipp 15	Bestimmen Sie die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts der waagrechten Wandoberkante.
Tipp 16	Die Funktionsgleichung von g können Sie in Normalform $g(x) = ax^2 + bx + c$ oder in Scheitelform $g(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ ansetzen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten unter Verwendung der in der Aufgabe genannten Bedingungen auf.
Tipp 17	Veranschaulichen Sie die Situation durch eine geeignete Zeichnung.
Tipp 18	Beachten Sie, dass die Funktion für die momentane Änderungsrate gegeben ist.
Tipp 19	Betrachten Sie den Grenzfall und bestimmen Sie damit näherungsweise aus dem Graphen die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate 2 Zentimeter je Stunde beträgt.
Tipp 20	Wie erhalten Sie aus der Änderungsrate des Bestands über einem gewissen Zeitraum den Bestand selbst?

Tipp 21	Der gesuchte Funktionsterm der Funktion S enthält einen zeitunabhängigen und einen zeitabhängigen Summanden.
Tipp 22	Beachten Sie, dass s für $t > 2$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte besitzt.
Tipp 23	Die Schneehöhe nimmt *ohne* Schneekanonen zu, solange die momentane Änderungsrate positiv ist.
Tipp 24	Welche Schneehöhe würde ohne Schneekanonen um 18.00 Uhr erreicht werden?
Tipp 25	Veranschaulichen Sie sich die Situation durch eine Zeichnung für $a = 3$.
Tipp 26	Wenn eine Raute gleich lange Diagonalen hat, dann ist die Raute ein Quadrat.
Tipp 27	Machen Sie einen allgemeinen Ansatz für eine Koordinatengleichung der Ebene E^*. Beachten Sie, dass die drei Punkte A, B und C auf der Ebene E^* liegen.
Tipp 28	Bestimmen Sie einen Normalenvektor der x_1x_2-Ebene und einen Normalenvektor der Ebene E^*, in der die Nutzfläche liegt.
Tipp 29	Wie berechnet man den Flächeninhalt eines Rechtecks?
Tipp 30	Die Schnittgeraden der Rückwand mit der Dachfläche und der Rückwand mit der Nutzfläche sind parallel zueinander.
Tipp 31	Bestimmen Sie jeweils eine Parametergleichung der Geraden (BC) und der Geraden (B^*C^*), auf der die rechte Dachkante liegt.
Tipp 32	Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm.
Tipp 33	Es liegt eine Bernoulli-Kette vor.
Tipp 34	Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 12 mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{a}{6}$ vor. Dabei beschreibt a die Anzahl der Seiten des Würfels, auf denen die Augenzahl 3 steht.
Tipp 35	Es liegt ein rechtsseitiger Signifikanztest vor.
Tipp 36	Wie berechnet man die Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke aus den Koordinaten der Endpunkte dieser Strecke?
Tipp 37	Der Umfang eines Dreiecks ist die Summe seiner drei Seitenlängen.
Tipp 38	Bestimmen Sie einen Normalenvektor von E.
Tipp 39	Wie lauten die Koordinaten eines beliebigen Punktes Q_r, der auf der Kante BS liegt?
Tipp 40	Was wissen Sie über die x_2-Koordinate von Z, wenn Z auf der x_1x_3-Ebene liegt? Auf welchen besonderen Ebenen liegen die Grundfläche ABC bzw. die Seitenfläche ACS?
Tipp 41	Es liegt eine Bernoulli-Kette vor.
Tipp 42	Hier finden zwei binomialverteilte Zufallsexperimente nacheinander statt. Wie berechnet man aus den Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zufallsexperimente die Gesamtwahrscheinlichkeit?
Tipp 43	Hier finden zwei binomialverteilte Zufallsexperimente nacheinander statt. Wie viele Anfängerpaare und Fortgeschrittenenpaare müssen kommen, damit elf oder zwölf Paare anwesend sind?

Folgende Tipps geben eine weitere Hilfestellung:

Tipp 1	Sie benötigen bei einem der Faktoren die Kettenregel.
Tipp 2	Denken Sie an die „Umkehrung der Kettenregel" und die Integrationskonstante. Machen Sie eine Probe durch Ableiten der von Ihnen notierten Stammfunktion.
Tipp 3	Denken Sie an die Substitution $e^x = u$.
Tipp 4	Die Steigung des Graphen im Wendepunkt ist zugleich die Steigung der Tangente in diesem.
Tipp 5	(1) Auch $F'(1)$ können Sie am Graphen ablesen. (2) Allgemein gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (3) Der Graph von F hat die Wendestelle $x_W = 0$. (4) $f(F(-2))$ kann als Steigung des Graphen von F interpretiert werden.
Tipp 6	Machen Sie die Punktprobe für $P(p\,\vert\,p\,\vert\,p)$.
Tipp 7	Wählen Sie einen „allgemeinen Punkt" R auf g und bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{QR}$. Welche Beziehung muss zwischen dem Richtungsvektor von g und dem Vektor $\overrightarrow{QR}$ bestehen, wenn beide Vektoren orthogonal sein sollen?
Tipp 8	Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E_a in Abhängigkeit von a.
Tipp 9	Die Wahrscheinlichkeit 0,7 entsteht als Summe von zwei bzw. drei Wahrscheinlichkeiten. Das gesuchte Ereignis ist eingetreten, wenn eines der beiden bzw. der drei Ergebnisse vorgekommen ist.
Tipp 10	Schreiben Sie den Erwartungswert für den Auszahlungsbetrag in Abhängigkeit von den noch unbekannten Wahrscheinlichkeiten p_1 bzw. p_2 für die Zahlen 1 bzw. 2 auf.
Tipp 11	Der Berührpunkt B der beiden Kugeln liegt auf der Strecke M_1M_2. Sie können daher den Vektor $\overrightarrow{M_1B}$ als Vielfaches des Vektors $\overrightarrow{M_1M_2}$ darstellen.
Tipp 12	Bestimmen Sie die Ableitung von f.
Tipp 13	Bestimmen Sie näherungsweise die relevanten Schnittpunkte der Geraden mit der Gleichung $y = 4$ mit dem Graphen G_f.
Tipp 14	Die Steigung eines Graphen ist an der Stelle am größten, an der die Ableitungsfunktion ihren größten Wert annimmt. Bestimmen Sie daher das Maximum von f' auf dem gegebenen Intervall.
Tipp 15	Der sichtbare Teil der Wand liegt im Modell zwischen dem Graphen von f und der Geraden mit der Gleichung $y = 5{,}4$ im Intervall $[2{,}72; 3]$.
Tipp 16	„Nahtlos anschließen" an der Stelle x_0 heißt $f(x_0) = g(x_0)$, „knickfrei dort anschließen" heißt zusätzlich $f'(x_0) = g'(x_0)$. Die Steigung im Parabelscheitel hat den Wert 0.
Tipp 17	Da der Kreis den Graphen von h berührt, gibt es eine gemeinsame Tangente im Berührpunkt. Die Steigung dieser Tangente können Sie exakt berechnen.
Tipp 18	Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion s' von s.

Tipp 19	Bestimmen Sie näherungsweise die Schnittstellen des Graphen von s und der Geraden mit der Gleichung $y = 2$.
Tipp 20	Beachten Sie, dass bei Beobachtungsbeginn bereits Schnee liegt. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von s.
Tipp 21	Verallgemeinern Sie den Ansatz für die Lösung der letzten Frage in Teilaufgabe a).
Tipp 22	Im Zeitraum von $t = 2$ bis zur Nullstelle von s nimmt die Schneehöhe zu.
Tipp 23	Wenn die Schneekanonen die momentane Änderungsrate s um 1 cm pro Stunde erhöhen, dann nimmt die Schneehöhe so lange zu, wie $s(t) > -1$ gilt.
Tipp 24	Welche Schneehöhe müsste in welchem Zeitraum mit den Schneekanonen erzeugt werden?
Tipp 25	Nutzen Sie aus, dass bei einer Raute die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und sich gegenseitig halbieren.
Tipp 26	Bestimmen Sie die x-Koordinate eines der anderen beiden Eckpunkte der Raute in Abhängigkeit von a.
Tipp 27	Einsetzen der Koordinaten von A, B und C in die Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ liefert ein LGS für die Koeffizienten a, b, c und d.
Tipp 28	Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist $\overrightarrow{n_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor der Ebene E^* ist $\overrightarrow{n_{E^*}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Tipp 29	Die Seitenlängen des Rechtecks erhalten Sie mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$.
Tipp 30	Welche x_3-Koordinaten haben jeweils die Punkte auf den beiden Schnittgeraden?
Tipp 31	Ein beliebiger Punkt P_r auf (BC) ist $P_r(15 - 15r \mid 20 \mid 6r)$. Ein beliebiger Punkt P_s^* auf (B^*C^*) ist $P_s^*(15 - 15s \mid 20 \mid 14 - 5s)$.
Tipp 32	Die Augensumme der beiden Würfe beträgt 3, falls bei einem Wurf die 1, beim anderen Wurf die 2 auftritt.
Tipp 33	Berechnen Sie $P(X \leqq 4)$ für eine $B_{12;\frac{1}{3}}$-Verteilung.
Tipp 34	Es muss $P(X \geqq 4) = 1 - P(X \leqq 3) \geqq 0{,}99$ gelten.
Tipp 35	Gesucht ist die kleinste Zahl $g + 1$, für die $P(X \geqq g + 1) \leqq 0{,}01$ gilt.
Tipp 36	Die Koordinaten des Mittelpunktes M_1 sind die Mittelwerte der Koordinaten der Punkte A und S. Die Koordinaten des Mittelpunktes M_2 sind die Mittelwerte der Koordinaten der Punkte C und S.
Tipp 37	Die Seitenlängen des Dreiecks erhalten Sie mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$ und $\overrightarrow{M_1M_2}$.
Tipp 38	Ein Normalenvektor von E muss auf den Vektoren $\overrightarrow{BM_1}$ und $\overrightarrow{BM_2}$ senkrecht stehen. Sie können einen Normalenvektor beispielsweise mithilfe des Vektorproduktes berechnen.
Tipp 39	Für einen beliebigen Punkt Q_r auf BS gilt: $Q_r(6 - 6r \mid 0 \mid 5r)$; $0 \leqq r \leqq 1$
Tipp 40	Für den Punkt Z muss gelten: $z_2 = 0$ und $z_1 = z_3$

Tipp 41	Berechnen Sie $P(X = 4)$ für eine $B_{4;0,75}$-Verteilung.
Tipp 42	Berechnen Sie $P(X \leqq 3)$ für eine $B_{4;0,75}$-Verteilung und $P(Y \geqq 6)$ für eine $B_{8;0,9}$-Verteilung.
Tipp 43	Zeichnen Sie den relevanten Teil eines Baumdiagramms für elf und zwölf anwesende Paare.

Folgende Tipps helfen, Lücken zu schließen:

Tipp 1	Bearbeiten Sie aus **F 15** die Beispiele a) und c), aus **F 14** das Beispiel b) und die Aufgabe c), und aus **F 16** das Beispiel b) und die Aufgabe d).
Tipp 2	Bearbeiten Sie aus **F 41** das Beispiel 3 und die Aufgaben 1 b) und 1 d) sowie aus **F 42** das Beispiel 1.
Tipp 3	Bearbeiten Sie aus **F 7** die Beispiele 1 und 2 und die Aufgaben a), b), c) und aus **F 2** das Beispiel f) und die Aufgabe f).
Tipp 4	Bearbeiten Sie aus **F 31** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 a) und aus **F 21** die Beispiele 1 und 2 sowie die Aufgabe a).
Tipp 5	(1) Bearbeiten Sie aus **F 77** das Beispiel 1 a) und die Aufgabe a). (2) Bearbeiten Sie aus **F 77** das Beispiel 2 a) und die Aufgabe b). (3) Bearbeiten Sie aus **F 77** das Beispiel 1 b) und die Aufgabe d). (4) Zeigen Sie: $f(F(-2)) = F'(0)$ Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Steigung des Graphen von F an der Stelle 0.
Tipp 6	Bearbeiten Sie aus **F 122** die Beispiele 1 und 2 sowie die Aufgabe.
Tipp 7	Bearbeiten Sie aus **F 108** das Beispiel und die Aufgabe und aus **F 151** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 8	Lösen Sie die Betragsgleichung $d(O; E_a) = \frac{\lvert -a \rvert}{9} = 2$. Bearbeiten Sie aus **F 8** das Beispiel und die Aufgabe, aus **F 162** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1, aus **F 181** die Beispiele 1 a) und 1 c) sowie die Aufgabe 1.
Tipp 9	Die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu einem Ereignis gehören, werden addiert. Zu einem der gesuchten Ereignisse gehören die Wahrscheinlichkeiten 0,4 und 0,3 für die Glücksrad-Anzeige 1 oder 3.
Tipp 10	Es gilt: $E(X) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot (0{,}5 - p_1) + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2$ Bearbeiten Sie aus **F 223** das Beispiel 2 und die Aufgabe 2.
Tipp 11	$\overrightarrow{M_1B}$ ist r_1-mal so lang wie der Einheitsvektor des Vektors $\overrightarrow{M_1M_2}$. Alternativ: B teilt die Strecke M_1M_2 im Verhältnis $r_1 : (r_1 + r_2)$. $\overrightarrow{M_1B}$ ist daher $r_1 : (r_1 + r_2)$-mal so lang wie der Vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$.
Tipp 12	Lösen Sie die Gleichung $x \cdot (1 - 0{,}3x) = 0$. Bearbeiten Sie aus **F 29** das Beispiel a) und die Aufgabe a).
Tipp 13	Der Abstand der beiden berechneten Schnittpunkte lässt sich als Breite des Sees interpretieren.
Tipp 14	Bearbeiten Sie aus **F 27** das Beispiel a) und die Aufgabe a).

Tipp 15	Interpretieren Sie den Inhalt der berechneten Fläche unter Beachtung des beim Modell verwendeten Maßstabs. Bearbeiten Sie aus **F 52** die Beispiele 1 und 2 sowie die Aufgabe 2.
Tipp 16	Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit drei bzw. zwei Variablen. Bearbeiten Sie aus **F 61** die Beispiele 1 und 3 sowie die Aufgaben 1 und 3.
Tipp 17	Die Tangente im Kreispunkt B ist orthogonal zum Berührradius MB. Dieser Berührradius liegt demnach auf der Normalen durch B. Bearbeiten Sie aus **F 21** das Beispiel 1 sowie die Aufgabe 1 a) und aus **F 23** das Beispiel a) und die Aufgabe a).
Tipp 18	Bearbeiten Sie aus **F 29** das Beispiel b) und die Aufgabe d) und aus **F 7** das Beispiel 1 und die Aufgabe b).
Tipp 19	Betrachten Sie den Verlauf des Graphen zwischen den Schnittstellen.
Tipp 20	Bearbeiten Sie aus **F 82** das Beispiel und die Aufgabe und aus **F 41** das Beispiel 4 und die Aufgaben 2 a) und 2 c).
Tipp 21	Den zeitabhängigen Teil des gesuchten Funktionsterms erhalten Sie mit $I_0(t) = \int_0^t s(x)\,dx$ exakt. Bearbeiten Sie aus **F 43** die Beispiele 1 b) und 2 c) sowie die Aufgabe 2 d) und aus **F 41** das Beispiel 4 und die Aufgaben 2 a) und 2 c).
Tipp 22	Der Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von s über dem Intervall $[2;t_3]$ (t_3 ist Nullstelle von s) muss genauso groß sein wie der absolute Flächeninhalt unter dem Graphen von s über dem Intervall $[t_3;t^*]$.
Tipp 23	Beachten Sie, dass ohne Schneekanonen die Schneehöhe nur bis zum Zeitpunkt $t_3 \approx 3{,}9$ zunimmt.
Tipp 24	Die Änderungsrate der Schneehöhe mit den leistungsfähiger eingestellten Schneekanonen ist während der gesamten Arbeitszeit von 12.30 Uhr bis 18.00 Uhr konstant.
Tipp 25	Beachten Sie, dass die Gleichung $3 \cdot \cos(3x) = 1{,}5$ im betrachteten Intervall zwei Lösungen hat. Bearbeiten Sie aus **F 6** das Beispiel 1.
Tipp 26	Lösen Sie die Gleichung $g_a\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$. Geben Sie einen exakten Wert für a an.
Tipp 27	Bearbeiten Sie aus **F 125** das Beispiel 1 und die Aufgabe 3.
Tipp 28	Bearbeiten Sie aus **F 153 a** das Beispiel und die Aufgabe 1.
Tipp 29	Für den Flächeninhalt gilt $A = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$. Bearbeiten Sie aus **F 101** das Beispiel 1 und die Aufgabe und aus **F 102** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 30	Alle Punkte auf der Schnittgeraden der Rückwand und der Dachfläche haben die x_3-Koordinate 9. Die x_3-Koordinate des Punktes C ist 6.
Tipp 31	P und P* haben die gleiche x_1- und die gleiche x_2-Koordinate. Ihre x_3-Koordinaten unterscheiden sich um 5,2.
Tipp 32	Bearbeiten Sie aus **F 211** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 33	Bearbeiten Sie aus **F 231** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1 b).

Tipp 34	Bearbeiten Sie aus **F 233 a** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 35	Bearbeiten Sie aus **F 242** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 36	Bearbeiten Sie aus **F 105** das Beispiel 2 und die Aufgabe. Bearbeiten Sie aus **F 111** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1.
Tipp 37	Bearbeiten Sie aus **F 101** das Beispiel 1 und die Aufgabe und aus **F 102** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 38	Bearbeiten Sie aus **F 109** das Beispiel 3 und eine der Aufgaben. Bearbeiten Sie aus **F 125** das Beispiel 2 und die Aufgabe 3.
Tipp 39	Für die Vektoren $\overrightarrow{Q_rM_1}$ und $\overrightarrow{Q_rM_2}$ muss gelten $\overrightarrow{Q_rM_1} \cdot \overrightarrow{Q_rM_2} = 0$. Aus dieser Bedingung erhalten Sie eine Gleichung für den Parameter r. Bearbeiten Sie aus **F 108** das Beispiel und die Aufgabe.
Tipp 40	Der Punkt $Z(d\,\|\,0\,\|\,d)$ muss auch von der Ebene E den Abstand d haben. Bearbeiten Sie aus **F 162** das Beispiel 2 und die Aufgabe 1.
Tipp 41	Bearbeiten Sie aus **F 231** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 a).
Tipp 42	Bearbeiten Sie aus **F 231** die Beispiele 2 und 3 und die Aufgaben 1 b) und 1 c).
Tipp 43	Es sind elf Paare anwesend, falls sieben Anfängerpaare und vier Fortgeschrittenenpaare oder falls acht Anfängerpaare und drei Fortgeschrittenenpaare kommen. Es sind zwölf Paare anwesend, falls acht Anfängerpaare und vier Fortgeschrittenenpaare kommen. Bearbeiten Sie aus **F 211** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1. Bearbeiten Sie aus **F 231** das Beispiel 1 und die Aufgabe 1 a).

Lösungen

Pflichtteil

Aufgabe 1

Mit Produktregel, Potenzregel und Kettenregel folgt aus $f(x) = (5x+1)\cdot\sin(x^2)$:

$f'(x) = 5\cdot\sin(x^2) + (5x+1)\cdot\cos(x^2)\cdot 2x$

$f'(x) = 5\cdot\sin(x^2) + 2x\cdot(5x+1)\cdot\cos(x^2)$

F 15
F 14
F 16

Aufgabe 2

Es gilt: $f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3} = 48\cdot(2x-4)^{-3}$

Eine Stammfunktion F von f hat die Funktionsgleichung

$F(x) = 48\cdot\frac{1}{-2}\cdot(2x-4)^{-2}\cdot\frac{1}{2} + c = -\frac{12}{(2x-4)^2} + c$

F 41

mit einer beliebigen Konstanten c, $c \in \mathbb{R}$.

Die Bedingung $F(3) = 1$ ergibt:

F 42

$$-\frac{12}{(2\cdot 3-4)^2} + c = 1$$
$$-3 + c = 1$$
$$c = 4$$

Die gesuchte Stammfunktion ist F mit $F(x) = -\frac{12}{(2x-4)^2} + 4$.

Aufgabe 3

F 7

$$3 - e^x = \frac{2}{e^x} \qquad |\cdot e^x;\ e^x \neq 0$$
$$3\cdot e^x - (e^x)^2 = 2$$
$$(e^x)^2 - 3\cdot e^x + 2 = 0$$

Substitution: $e^x = u$

F 2

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$
$$D = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 > 0$$
$$u_{1;2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1}$$
$$u_{1;2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$u_1 = 2; \qquad u_2 = 1$$

Resubstitution:

$$e^x = 2 \qquad e^x = 1$$
$$x_1 = \ln(2); \qquad x_2 = \ln(1) = 0$$

Die gegebene Gleichung hat die beiden Lösungen $\ln(2)$ und 0.

Aufgabe 4

Ableitungen: $f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + 2x - 1$; $f''(x) = -x + 2$; $f'''(x) = -1 \neq 0$

F 31

Bestimmung der Wendestelle:
Aus $f''(x) = 0$ folgt $-x + 2 = 0$ und daraus $x_1 = 2$.
Wegen $f'''(2) = -1 \neq 0$ ist $x_1 = 2$ die Wendestelle.

Anmerkung: Der Nachweis mit f‴ ist nicht verlangt, da die Existenz des Wendepunkts durch den Aufgabentext gesichert ist.

Bestimmung der y-Koordinate des Wendepunkts:

Es gilt: $y_1 = f(2) = -\frac{1}{6}\cdot 2^3 + 2^2 - 2 = \frac{2}{3}$

Steigung des Graphen im Wendepunkt: $f'(2) = -\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 1$

F 21

Gleichung der Wendetangente: $y = f'(2)\cdot(x-2) + f(2) = 1\cdot(x-2) + \frac{2}{3} = x - \frac{4}{3}$

Die Tangente im Wendepunkt hat die Gleichung $y = x - \frac{4}{3}$.

Aufgabe 5

(1) Die Aussage ist wahr.
Begründung:
Ablesung am Graphen ergibt: $F(1) = 0$
Die Steigung des Graphen von F an der Stelle $x_1 = 1$ hat den Wert 0, da $T(1\,|\,0)$ ein Tiefpunkt ist. Daher gilt: $F'(1) = 0$
Da F Stammfunktion zu f ist, also $F'(x) = f(x)$ gilt, folgt damit: $F'(1) = f(1) = 0$

(2) Die Aussage ist falsch.
Es gilt: $\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0)$
Ablesung am Graphen ergibt: $F(2) = 4$; $F(0) = 2$
Daraus folgt: $\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2 \neq 4$

F 77

(3) Die Aussage ist wahr.
Aus $f(x) = F'(x)$ folgt $f'(x) = F''(x)$.
Am Graphen von F erkennt man die Wendestelle $x_2 = 0$.
Daher gilt einerseits $F''(0) = 0$, andererseits $f'(0) = F''(0)$ und demzufolge $f'(0) = 0$.
Die Funktion f′ hat also im Intervall $[-1;1]$ eine Nullstelle.

(4) Die Aussage ist falsch.
Am Graphen liest man ab: $F(-2) = 0$
Folglich gilt wegen $F'(x) = f(x)$: $f(F(-2)) = f(0) = F'(0)$
Die Steigung des Graphen von F an der Stelle $x_3 = 0$ ist näherungsweise -3, d.h. $F'(0) < 0$.

2

Aufgabe 6

a) Wenn es einen solchen Punkt gibt, dann ist es $P(p\,|\,p\,|\,p)$ mit $p \in \mathbb{R}$.

Punktprobe für P auf der Geraden g: $\begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

F 122

Daraus folgt:
(I) $p = 3 + r \cdot 1$
(II) $p = 0 + r \cdot 4$
(III) $p = 1 + r \cdot 3$

Aus (II) folgt $r = \frac{1}{4}p$.

Damit erhält man:

(I) $p = 3 + \frac{1}{4}p$, also $p = 4$

(III) $p = 1 + \frac{3}{4}p$, also $p = 4$

Mit (II) ergibt sich $r = 1$.

Folglich liegt der Punkt $P(4\,|\,4\,|\,4)$ auf der Geraden g.

b) Der gegebene Punkt $Q(8\,|\,5\,|\,10)$ liegt auf der Geraden h. Sein Ortsvektor wird daher als Stützvektor für die Gleichung von h verwendet.
Wählt man einen beliebigen Punkt $R_r(3+r\,|\,4r\,|\,1+3r)$ auf g, so ist der Vektor

$\overrightarrow{QR_r} = \begin{pmatrix} 3+r \\ 4r \\ 1+3r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-5 \\ 4r-5 \\ 3r-9 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor einer Geraden, die durch Q geht und g in R_r schneidet.

F 108

Soll diese Gerade zu g orthogonal sein, so muss der Richtungsvektor $\overrightarrow{QR_r}$ zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ von g orthogonal sein.

Bedingung:

$$\begin{pmatrix} r-5 \\ 4r-5 \\ 3r-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

F 151

Folglich:

$$\begin{aligned} (r-5)\cdot 1 + (4r-5)\cdot 4 + (3r-9)\cdot 3 &= 0 \\ r - 5 + 16r - 20 + 9r - 27 &= 0 \\ 26r - 52 &= 0 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\overrightarrow{QR_2} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 8-5 \\ 6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

F 121

Die Gerade h hat somit die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Anmerkung:
Eine einfachere äquivalente Gleichung ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7

Die gegebene Ebene E hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Alle zu E parallelen Ebenen können mit dem gleichen Normalenvektor beschrieben werden. Diese Ebenenschar E_a lässt sich also durch die Gleichung $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = a, a \in \mathbb{R}$, beschreiben.

F 181

Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung von E_a:

$$\frac{4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - a}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - a}{9} = 0$$

Abstand des Koordinatenursprungs O von Ebene E_a:

F 162

$$d(O; E_a) = \frac{|4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - a|}{9} = \frac{|-a|}{9}$$

Die Abstandsbedingung $d(O; E_a) = 2$ ergibt $\frac{|-a|}{9} = 2$.

F 8

Diese Betragsgleichung hat die Lösungen $a_1 = 18$ und $a_2 = -18$.

Die gesuchten Ebenen F und G haben daher die Gleichungen $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 18$ und $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -18$.

Aufgabe 8

a) Die Wahrscheinlichkeit 0,7 erhält man aus den gegebenen Wahrscheinlichkeiten auf zwei Arten

1. $0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}3$

In diesem Fall sind z. B. mögliche äquivalente Beschreibungen des Ereignisses:

Beim Drehen erscheint die Zahl 1 oder die Zahl 3.
Beim Drehen erscheint eine ungerade Zahl.
Beim Drehen erscheint keine gerade Zahl.

2. $0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2$

In diesem Fall sind z. B. die folgenden äquivalenten Beschreibungen möglich:

Beim Drehen erscheint die Zahl 1 oder die Zahl 2 oder die Zahl 4.
Beim Drehen erscheint nicht die Zahl 3.
Beim Drehen erscheint eine Potenz von 2.

b) Die neue Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen der Zahl 1 sei p_1, die neue Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen der Zahl 2 sei p_2.
Die Summe aller vier Wahrscheinlichkeiten muss den Wert 1 ergeben
$p_1 + p_2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$
Daraus folgt: $p_2 = 0{,}5 - p_1$

Die Zufallsvariable X beschreibt den Auszahlungsbetrag in Euro: $X \in \{1; 2; 3; 4\}$
Für die Wahrscheinlichkeiten der Auszahlungsbeträge gilt:

X	1	2	3	4
P(x)	p_1	$p_2 = 0{,}5 - p_1$	0,3	0,2

Für den Erwartungswert folgt damit:

$$E(X) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 = p_1 + 2p_2 + 1{,}7 = p_1 + 2 \cdot (0{,}5 - p_1) + 1{,}7$$
$$= -p_1 + 2{,}7$$

F 221

2

F 223

Das Spiel ist fair, wenn die Auszahlung genauso groß ist wie der Einsatz.
Bedingung: $E(X) = 2{,}5$
Daraus folgt $-p_1 + 2{,}7 = 2{,}5$ und somit $p_1 = 0{,}2$ und $p_2 = 0{,}3$.

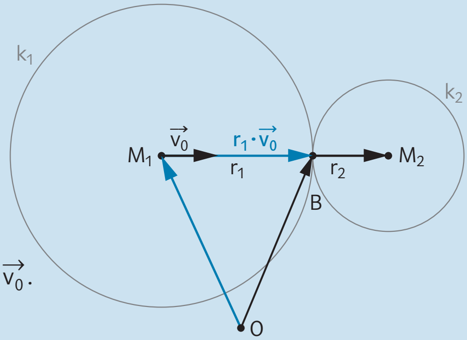
Das Spiel wird fair, wenn man die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 1 auf 0,2 und die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2 auf 0,3 verändert.

Aufgabe 9

Zuerst bestimmt man den Verbindungsvektor $\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$ der beiden Kugelmittelpunkte M_1 und M_2 und dessen Länge $|\vec{v}|$.

Damit lässt sich der Einheitsvektor $\vec{v_0} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ zu $\vec{v}$ angeben.

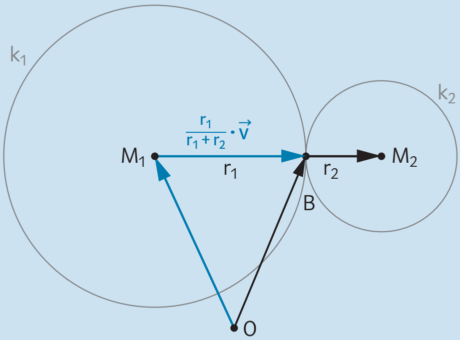
Der gesuchte Berührpunkt B hat dann den Ortsvektor $\vec{b} = \overrightarrow{OM_1} + r_1 \cdot \vec{v_0}$.



Variante:
Da der Punkt B die Strecke M_1M_2 im Verhältnis der beiden Radien r_1 und r_2 teilt, hat die Strecke M_1B die Länge $\frac{r_1}{r_1+r_2} \cdot \overline{M_1M_2}$.

Daher gilt $\overrightarrow{M_1B} = \frac{r_1}{r_1+r_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$

und folglich
$\vec{b} = \overrightarrow{OM_1} + \frac{r_1}{r_1+r_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$.



Anmerkungen:
1. Man kann auch $\vec{b} = \overrightarrow{OM_2} - r_2 \cdot \vec{v_0}$ verwenden.
2. Wer die Vektorgleichung für eine Kugel zur Verfügung hat, kann auch die zwei Schnittpunkte einer der beiden Kugeln mit der Geraden durch die Kugelmittelpunkte bestimmen. Der zwischen M_1 und M_2 liegende Schnittpunkt ist der Berührpunkt B.

Wahlteil **Analysis**

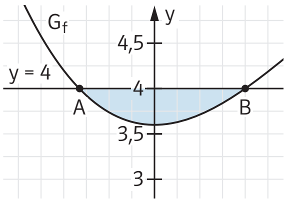
Aufgabe A 1.1

a) Höhe des höchsten Punkts:
$f'(x) = -0{,}3x^2 + x = x(1 - 0{,}3x)$
Notwendige Bedingung für Extrema: $f'(x) = x(1 - 0{,}3x) = 0$
$x_1 = 0$ (Min.) und $x_2 = \frac{10}{3}$ (Max.)
Bemerkung: Die hinreichende Bedingung ist nicht nötig, da die Existenz des Maximums gesichert ist.
$f\left(\frac{10}{3}\right) \approx 5{,}45$

Der höchste Punkt des Geländes liegt daher auf einer Höhe von etwa 545 Metern.

F 2

Breite des Sees:
Der Tiefpunkt des Graphen ist $T(0\,|\,3{,}6)$.
An der Stelle $x_0 = 0$ liegt demnach der tiefste Punkt des Sees.
Da der See an dieser Stelle 40 Meter tief ist, liegt die Wasseroberfläche im Modell auf der Geraden mit der Gleichung $y = 4$.
Die Breite des Sees ergibt sich durch den Abstand der beiden Punkte, in denen diese Gerade den Graphen von f in einer Umgebung von $x_0 = 0$ schneidet.



Aus der Abbildung ergibt sich die Lösung der Gleichung $f(x) = 4$ näherungsweise:
$x_1 = -0{,}8;\ x_2 \approx 1$
Die beiden Schnittpunkte haben näherungsweise den Abstand
$d = 0{,}8 + 1 = 1{,}8$.

Der See ist daher etwa 180 Meter breit.

Hangneigung an der steilsten Stelle des Profils:
Der Graph von f steigt zwischen dem tiefsten Punkt des Sees und dem höchsten Geländepunkt. Daher ist der Graph an der Stelle am steilsten, an der die Ableitungsfunktion f′ ihren größten Wert annimmt.
Gesucht ist also das Maximum von f′.
$f'(x) = -0{,}3x^2 + x$
$[f'(x)]' = f''(x) = -0{,}6x + 1 = 0;\ x_4 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$
$f'(x_4) \approx 0{,}83$
An der steilsten Stelle ist die Steigung des Geländes etwa 0,83.

F 27

Bestimmung des Steigungswinkels:
Aus $\tan(\alpha) \approx 0{,}83$ folgt $\alpha \approx 39{,}7°$.

Da die Hangneigung an der steilsten Stelle größer als 30° ist, besteht Lawinengefahr.

b) Die Oberkante der Wand trifft das Geländeprofil im Westen auf der Höhe 540 m im Punkt P(3 | 5,4).
Der zweite Eckpunkt Q der Oberkante liegt 28 m westlich von P auf derselben Höhe.
Seine x-Koordinate hat daher den Wert $3 - 0{,}28 = 2{,}72$, seine y-Koordinate den Wert 5,4.
Damit ergibt sich Q(2,72 | 5,4).

Im Modell erhält man die Maßzahl der gesuchten Wandfläche durch Berechnung der Fläche zwischen dem Graphen der Geraden mit der Gleichung $y = 5{,}4$ und dem Graphen von f in den Grenzen 2,72 und 3:

$$\int_{2{,}72}^{3} (5{,}4 - f(x))\,dx = \int_{2{,}72}^{3} (0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 1{,}8)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 1{,}8x\right]_{2{,}72}^{3} \approx 0{,}01453$$ F 52

Eine Flächeneinheit im verwendeten Modell entspricht dem Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge 100 m, also 10 000 m^2.
Der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils beträgt daher etwa 145 m^2.

Dieser Flächeninhalt ist größer als 130 m^2.

c) Die Parabel zweiter Ordnung wird beschrieben durch die Funktion g mit $g(x) = ax^2 + bx + c$. F 61
Ihre Ableitungsfunktion hat die Gleichung $g'(x) = 2ax + b$.

Bedingungen:
Der Graph von g schließt an der Stelle 5 nahtlos an den Graphen von f an, d. h.:
(I) $g(5) = f(5) = 3{,}6$ (t)

Da die Graphen von g und f an der Stelle 5 knickfrei ineinander übergehen sollen, stimmen die Steigungen der beiden Graphen an dieser Stelle überein, d. h.:
(II) $g'(5) = f'(5) = -2{,}5$ (t)

Der Graph von g hat an der Stelle 6 eine waagrechte Tangente, d. h.:
(III) $g'(6) = 0$

Daraus erhält man das folgende Gleichungssystem

(I)	$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3{,}6$	(I)	$25a + 5b + c = 3{,}6$
(II)	$2a \cdot 5 + b = -2{,}5$	(II)	$10a + b = -2{,}5$
(III)	$2a \cdot 6 + b = 0$	(III)	$12a + b = 0$

Aus (II) $b = -2{,}5 - 10a$ und (III) $b = -12a$ folgt durch Gleichsetzen: $a = 1{,}25$
Damit aus (III): $b = -15$
$c = 47{,}35$ folgt aus (I). F 10
Die Funktion g hat demnach die Gleichung $g(x) = 1{,}25x^2 - 15x + 47{,}35$ und es gilt $g(6) = 2{,}35$.

Der tiefste Punkt des östlich benachbarten Tals liegt auf einer Höhe von 235 Metern.

Alternative:
Man verwendet die Scheitelgleichung der Funktion g mit
$g(x) = a(x - x_s)^2 + y_s = a(x - 6)^2 + y_s$ mit $g'(x) = 2a(x - x_s) = 2a(x - 6)$. F 61

Bedingungen:
Der Graph von g schließt an der Stelle 5 nahtlos an den Graphen von f an, d.h.:
(I) $g(5) = f(5) = 3{,}6$ (t)

Die Steigungen der Graphen von g und f an der Stelle 5 stimmen überein, d.h.:
(II) $g'(5) = f'(5) = -2{,}5$ (t)

Daraus erhält man ein Gleichungssystem mit nur zwei Variablen:

(I)	$a(5-6)^2 + y_s = 3{,}6$	(I)	$a + y_s = 3{,}6$
(II)	$2a(5-6) = -2{,}5$	(II)	$-2a = -2{,}5$

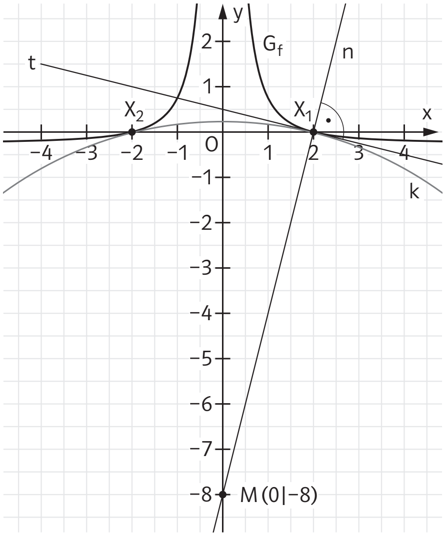
Hier erkennt man sofort $a = 1{,}25$ und $y_s = 2{,}35$.

F 10

Die Funktionsgleichung lautet $g(x) = 1{,}25(x-6)^2 + 2{,}35$ und es gilt $g(6) = 2{,}35$.

Aufgabe A 1.2

Veranschaulichung:



Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse:
Bedingung: $f(x) = 0$

$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = 0$

$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2;\ x_2 = -2$

Daraus erhält man die Schnittpunkte $X_1(2|0)$ und $X_2(-2|0)$.

Da sich der gesuchte Kreis k und der Graph von f in den Punkten X_1 und X_2 berühren sollen, haben dieser Kreis k und der Graph von f eine gemeinsame Tangente in jedem dieser Punkte.

Da der Kreisradius MX_1 orthogonal zur Kreistangente t im Berührpunkt X_1 ist, liegt er auf der Normalen n zum Graphen von f in X_1.

Wegen der Symmetrie des Graphen von f und des Kreises zur y-Achse liegt der gesuchte Kreismittelpunkt M auf der y-Achse. Es reicht daher aus, nur die Normale n in X_1 zu bestimmen. Ihr Schnittpunkt mit der y-Achse ist dann der Mittelpunkt M.

$h'(x) = \frac{-2}{x^3};\ h'(2) = -\frac{1}{4}$

Die Steigung der Tangente an den Graphen in X_1 ist $m_t = -0{,}25$. F 21

Daher hat die Normale n in diesem Punkt die Steigung $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-0{,}25} = 4$.

Die Gleichung der Normalen in X_1 lautet demnach $y = 4\cdot(x-2) + 0 = 4x - 8$. F 23

Sie schneidet die y-Achse im Punkt $M(0|-8)$.

Der Kreismittelpunkt ist $M(0|-8)$.

Aufgabe A 2.1

a) Bestimmung der maximalen momentanen Änderungsrate:
Es gilt $s'(t) = -8e^{-0,5t} + 14e^{-t} = e^{-0,5t} \cdot (-8 + 14e^{-0,5t})$.

F 16
F 17
F 7

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $s'(t) = 0$
$s'(t) = e^{-0,5t} \cdot (-8 + 14e^{-0,5t}) = 0$
Da $e^{-0,5t} > 0$ für alle t gilt, folgt $(-8 + 14e^{-0,5t}) = 0$.
Aus $14e^{-0,5t} = 8$ folgt $e^{-0,5t} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ bzw. $-0,5t = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

Man erhält genau einen Kandidaten für eine Extremstelle:
$t_1 = -2\ln\left(\frac{4}{7}\right) = 1,119\ldots$
Es gilt: $s''(t) = 4e^{-0,5t} - 14e^{-t}$

F 16
F 17
F 29

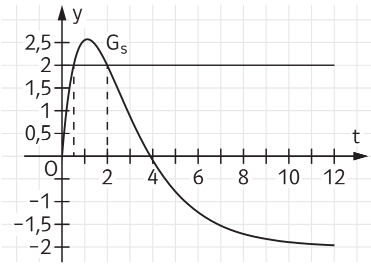
Einsetzen von t_1 liefert: $s''(t_1) = -\frac{16}{7} < 0$

Somit hat s bei t_1 ein lokales Maximum, es gilt $s(t_1) = \frac{18}{7}$.

Dem Graphen kann man entnehmen, dass die Randwerte für $t = 0$ bzw. $t = 12$ nicht größer als das lokale Maximum sind. Somit ist $s(t_1)$ sogar globales Maximum auf dem Intervall $[0;12]$.

Die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe beträgt etwa 2,6 Zentimeter je Stunde.

Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate größer ist als 2 Zentimeter je Stunde:
Es ist dasjenige Zeitintervall gesucht, für das $s(t) > 2$ gilt.
Bedingung für den Grenzfall: $s(t) = 2$
Man kann dem Graphen zwei Werte entnehmen, für die $s(t) = 2$ gilt:
$t_1 \approx 0,5$ und $t_2 \approx 2$
Der Graph von s verläuft im Intervall $]t_1;t_2[$ oberhalb der Geraden mit der Gleichung $y = 2$.



Daher ist die momentane Änderungsrate der Schneehöhe etwa zwischen 10:30 Uhr und 12:00 Uhr größer als 2 Zentimeter je Stunde.

Schneehöhe um 12:00 Uhr:
Die Schneehöhe um 12:00 Uhr ergibt sich aus der anfänglich vorhandenen Schneehöhe von 150 Zentimetern und der Gesamtänderung zwischen 10:00 Uhr und 12:00 Uhr:

F 82

$$150 + \int_0^2 s(t)\,dt = 150 + \left[-32e^{-0,5t} + 14e^{-t} - 2t\right]_0^2$$
$$= 150 + (-32e^{-1} + 14e^{-2} - 4) - (-32 + 14) = 154,122\ldots$$

Die Schneehöhe um 12:00 Uhr beträgt etwa 154 Zentimeter.

b) Integralfreie Funktionsgleichung zur Beschreibung der Schneehöhe:

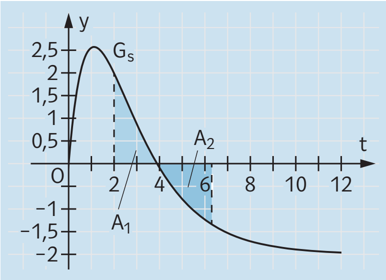
$$150 + \int_0^t s(x)\,dx = 150 + \int_0^t (16 \cdot e^{-0,5x} - 14 \cdot e^{-x} - 2)\,dx$$
$$= 150 + \left[16 \cdot \frac{1}{-0,5} \cdot e^{-0,5x} - 14 \cdot (-1) \cdot e^{-x} - 2x\right]_0^t$$
$$= 150 + (-32 \cdot e^{-0,5t} + 14 \cdot e^{-t} - 2t) - (-32 \cdot e^0 + 14 \cdot e^0 - 0)$$
$$= 150 + (-32 \cdot e^{-0,5t} + 14 \cdot e^{-t} - 2t) - (-18)$$
$$= -32 \cdot e^{-0,5t} + 14 \cdot e^{-t} - 2t + 168$$

F 43

F 41

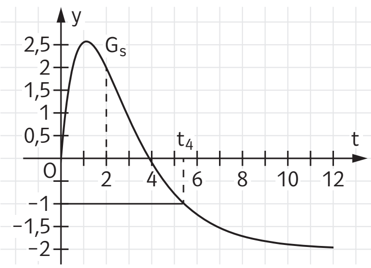
Die Schneehöhe kann durch die Funktion S mit
$S(t) = -32 \cdot e^{-0,5t} + 14 \cdot e^{-t} - 2t + 168$ beschrieben werden.

Begründung für den Zeitpunkt t*:



Die Maßzahl M_1 des Flächeninhalts der Fläche A_1 gibt den Zuwachs der Schneehöhe im Intervall von $t_2 = 2$ bis $t_3 \approx 3,9$ an.
Für $t > t_3$ ist die momentane Änderungsrate s negativ, das heißt, die Schneehöhe nimmt ab.
Die Maßzahl M_2 des absoluten Flächeninhalts der Fläche A_2 gibt die Abnahme der Schneehöhe im Intervall von t_3 bis t* an.
Man kann t* so wählen, dass die beiden Maßzahlen M_1 und M_2 gleich groß sind.
Somit ist die gesamte Änderung der Schneehöhe im Intervall von 2 bis t* null.
Also ist die Schneehöhe zum Zeitpunkt t* genauso hoch wie zum Zeitpunkt t = 2.

c) Verlängerung des Zeitraums, in dem die Schneehöhe zunimmt:
Wenn die Schneekanonen die momentane Änderungsrate s um 1 cm pro Stunde erhöhen, dann nimmt die Schneehöhe so lange zu, wie $s(t) > -1$ gilt.



Mit Schneekanonen nimmt die Schneehöhe bis zum Zeitpunkt $t_4 \approx 5,4$ zu.
Ohne Schneekanonen nimmt die Schneehöhe bis zum Zeitpunkt $t_3 \approx 3,9$ zu.
Es gilt: $t_4 - t_3 \approx 1,5$

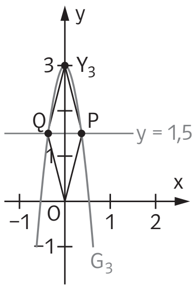
Durch den Einsatz der Schneekanonen verlängert sich der Zeitraum, in dem die Schneehöhe zunimmt, um ungefähr 1,5 Stunden.

Erforderliche Schneelieferungsrate der Schneekanonen für die gewünschte Schneehöhe:
Die Schneehöhe ohne die Schneekanonen wird um 18:00 Uhr, also 8 Stunden nach Beginn der Messung, beschrieben durch
$S(8) = -32 \cdot e^{-4} + 14 \cdot e^{-8} - 2 \cdot 8 + 168 = 151{,}418\ldots$.
Gefordert wird jedoch der Wert 160.
Da die Schneekanonen von 12:30 Uhr bis 18:00 Uhr, das heißt 5,5 Stunden, mit konstanter Leistung in Betrieb sind, müssten diese je Stunde $\frac{160 - S(8)}{5{,}5}$ Zentimeter Schneehöhe erzeugen. Dies sind etwa 1,6 Zentimeter.

Die Schneekanonen müssten etwa 1,6 Zentimeter Schnee je Stunde liefern.

Aufgabe A 2.2

a) Veranschaulichung der Situation für $a = 3$:



Bei jeder Raute sind die Diagonalen senkrecht zueinander und sie halbieren sich gegenseitig.

Es gilt: $g_3(0) = 3 \cdot \cos(3 \cdot 0) = 3 \cdot \cos(0) = 3 \cdot 1 = 3$
Der Schnittpunkt des Graphen G_3 mit der y-Achse ist daher $Y_3(0\,|\,3)$.

Die auf der y-Achse liegende Diagonale der Raute hat somit die Länge 3 Längeneinheiten.

F 71

Die beiden anderen Eckpunkte P und Q der Raute liegen folglich auf der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = 1{,}5$.
Für die Schnittstellen dieser Geraden mit dem Graphen von g_3 gilt: $g_3(x) = 1{,}5$

$3 \cdot \cos(3x) = 1{,}5; \ -\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}$

$\cos(3x) = \frac{1}{2}$, also $3x_2 = -\frac{\pi}{3}$ und $3x_1 = \frac{\pi}{3}$

Die Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = \frac{\pi}{9}$ und $x_2 = -\frac{\pi}{9}$.

Die Diagonale PQ hat also die Länge $\frac{2\pi}{9}$ Längeneinheiten.

b) Genau dann, wenn die Raute ein Quadrat ist, sind deren Diagonalen gleich lang.
Es gilt: $g_a(0) = a \cdot \cos(a \cdot 0) = a \cdot \cos(0) = a \cdot 1 = a$

Der Schnittpunkt des Graphen G_a mit der y-Achse ist daher $Y_a(0\,|\,a)$, $a > 0$.
Die auf der y-Achse liegende Diagonale der Raute hat somit die Länge a Längeneinheiten.

F 71

Die beiden anderen Eckpunkte P_a und Q_a der Raute liegen folglich auf der Parallelen zur x-Achse mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}a$.

Für die Schnittstellen dieser Geraden mit dem Graphen von g_a gilt:

$g_a(x) = \frac{1}{2}a, \ -\frac{\pi}{2a} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2a}$

Daraus folgt:

$$a \cdot \cos(a \cdot x) = \frac{1}{2}a$$
$$\cos(a \cdot x) = \frac{1}{2}$$
$$a \cdot x = \frac{\pi}{3}$$
$$x_1 = \frac{\pi}{3a}$$

Die kleinste positive Lösung dieser Gleichung ist $x_1 = \frac{\pi}{3a}$.
Jede weitere positive Lösung liegt außerhalb des gegebenen Definitionsbereichs.
Wegen der Symmetrie des Graphen von g_a zur y-Achse hat demnach die Diagonale P_aQ_a die Länge $\frac{2\pi}{3a}$ Längeneinheiten.
Die Diagonalen sind gleich lang, falls gilt: $a = \frac{2\pi}{3a}$
Daraus folgt $a^2 = \frac{2\pi}{3}$ und daher $a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} = 1{,}447\ldots$

Für $a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \approx 1{,}45$ ist die Raute ein Quadrat.

Wahlteil **Analytische Geometrie / Stochastik**

Aufgabe B 1.1

a) Koordinatengleichung der Ebene E*, auf der die Nutzfläche liegt:
Die Punkte A, B und C liegen auf E*.

Allgemeiner Ansatz für eine Koordinatengleichung von E*: F 125
$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Die Punktprobe für die Punkte A,B und C liefert das LGS:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 15a & = & d \\ \text{(II)} & 15a + 20b & = & d \\ \text{(III)} & 20b + 6c & = & d \end{array}$$

Man wählt z.B. $d = 1$ und löst das LGS.
Man erhält: $a = \frac{1}{15}$; $b = 0$; $c = \frac{1}{6}$

Eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt, ist
$\frac{1}{15}x_1 + \frac{1}{6}x_3 = 1$.
Diese Ebenengleichung kann man noch mit 30 multiplizieren, um Brüche zu vermeiden: $E\colon\ 2x_1 + 5x_3 = 30$

Weite α des Neigungswinkels zwischen der Nutzfläche und dem Erdboden:
Der Erdboden liegt in der x_1x_2-Ebene. Ein Normalenvektor dieser Ebene ist
$\overrightarrow{n_{12}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Normalenvektor der Ebene E* ist $\overrightarrow{n_{E^*}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Daher gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5}{1 \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}9285$ F 153 a

Damit erhält man $\alpha = 21{,}797\ldots°$.

Der Neigungswinkel zwischen der Nutzfläche und dem Erdboden hat näherungsweise die Weite 21,8°.

Alternative:
Der Winkel mit der Weite α tritt auch als Innenwinkel beim Punkt B des Seitendreiecks der Tribüne auf. Da dieses Dreieck rechtwinklig ist, gilt $\tan(\alpha) = \frac{c_3}{b_1} = \frac{6}{15}$ und damit $\alpha \approx 21{,}8°$.

Flächeninhalt der Nutzfläche:
Die Nutzfläche ist ein Rechteck, für dessen Flächeninhalt A gilt: $A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|$

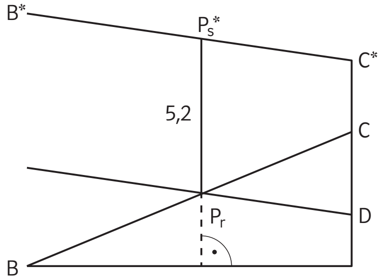
Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ folgt: F 101

$A = \sqrt{20^2} \cdot \sqrt{(-15)^2 + 6^2} = 20 \cdot \sqrt{261} \approx 323{,}1$ F 102

Der Flächeninhalt der Nutzfläche beträgt ca. 323 m².

b) Überprüfung der Sicherheitsbedingung:
Der Punkt C^* hat dieselbe x_1- und x_2-Koordinate wie der Punkt C. Da er auf der Ebene E liegt, folgt:
$0 - 3c_3^* = -27$
Die x_3-Koordinate von C^* ist somit:
$c_3^* = 9$.
Für die Höhe der Rückwand gilt:
$h = c_3^* - c_3 = 9 - 6 = 3$
Somit ist die Bedingung $h \geqq 2{,}5$ erfüllt.

Seitenansicht der Tribüne:



Die Sicherheitsbedingung ist erfüllt.

Berechnung der Koordinaten des Befestigungspunktes der Stütze auf der Kante BC:
Sei P_r der Befestigungspunkt der Stütze auf der Kante BC und P_s^* der Befestigungspunkt der Stütze auf der Dachkante B^*C^*.

Da B^* dieselbe x_1- und x_2-Koordinate wie B hat und auf E liegt, gilt:
$15 - 3b_3^* = -27$
Dies führt zu $b_3^* = 14$ und somit zu $B^*(15|20|14)$.

Parametergleichung für die Kante BC: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $0 \leqq r \leqq 1$ F 121

Parametergleichung für die Kante B^*C^*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$; $0 \leqq s \leqq 1$

Damit erhält man $P_r(15 - 15r|20|6r)$ bzw. $P_s^*(15 - 15s|20|14 - 5s)$.
Da P_r und P_s^* dieselbe x_1-Koordinate besitzen, folgt $15 - 15r = 15 - 15s$ bzw. $r = s$.
Die x_3-Koordinate von P_s^* ist um 5,2 größer als die x_3-Koordinate von P_r.
Somit gilt: $14 - 5s - 6r = 5{,}2$

Mit $r = s$ folgt $8{,}8 = 11r$ und daher $r = \frac{88}{110} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Damit erhält man $P_{0,8}(15 - 15 \cdot 0{,}8|20|6 - 0{,}8) = P_{0,8}(3|20|4{,}8)$.

Die Stütze wird auf der Kante BC im Punkt $P_{0,8}(3|20|4{,}8)$ fixiert.

Alternative: F 121
Die Parallele zur Geraden (B^*C^*) durch den Punkt $D(0|20|9 - 5{,}2)$ schneidet die Kante BC im Befestigungspunkt P der Stütze. F 131

Aufgabe B 1.2

a) Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme der beiden Würfe 3 beträgt:

$p(1;2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$; $p(2;1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

$p(\text{Augensumme } 3) = p(1;2) + p(2;1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ F 211

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme 3 beträgt, ist $\frac{1}{3}$.

Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel mindestens 4-mal die Augenzahl 2 zeigt:
Es sei X die Anzahl der Würfe, die die Augenzahl 2 zeigen.
Es liegt eine $B_{12;\frac{1}{3}}$-Verteilung vor.

$P(X \geqq 4) = 1 - P(X \leqq 3) \approx 0{,}6069$ F 231

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel mindestens 4-mal die Augenzahl 2 zeigt, beträgt ca. 60,7 %.

Mindestzahl der Seiten des Würfels, auf denen die Augenzahl 3 stehen muss:
Es liegt eine $B_{12;p}$-Verteilung vor.

Gesucht ist die Trefferwahrscheinlichkeit p. F 233
Bedingung: $P(X \geqq 4) = 1 - P(X \leqq 3) \geqq 0{,}99$ bzw. $P(X \leqq 3) \leqq 0{,}01$

Wenn auf a Seiten des Würfels die Augenzahl 3 steht, dann gilt: $p = \frac{a}{6}$

Man berechnet mit dem Taschenrechner für verschiedene Werte von a die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqq 3)$.
Es gilt für $a = 3$: $P(X \leqq 3) = 0{,}0729\ldots$;
für $a = 4$: $P(X \leqq 3) = 0{,}0038$

Auf mindestens vier Seiten des Würfels muss die Augenzahl 3 stehen.

b) Nullhypothese H_0: $p \leqq \frac{1}{6}$; Gegenhypothese H_1: $p > \frac{1}{6}$

Es liegt ein rechtsseitiger Hypothesentest vor. F 242
Es sei X die Anzahl der Würfe, die die Augenzahl 3 zeigen.
Stichprobenumfang: $n = 100$
Signifikanzniveau: $1\,\% = 0{,}01$
Im Extremfall liegt eine $B_{100;\frac{1}{6}}$-Verteilung vor.

Gesucht ist die kleinste Zahl $g+1$, für die gilt: $P(X \geqq g+1) \leqq 0{,}01$
$P(X \geqq g+1) = 1 - P(X \leqq g) \leqq 0{,}01$

Man erstellt mit dem Taschenrechner eine Wertetabelle für $1 - P(X \leqq g)$:

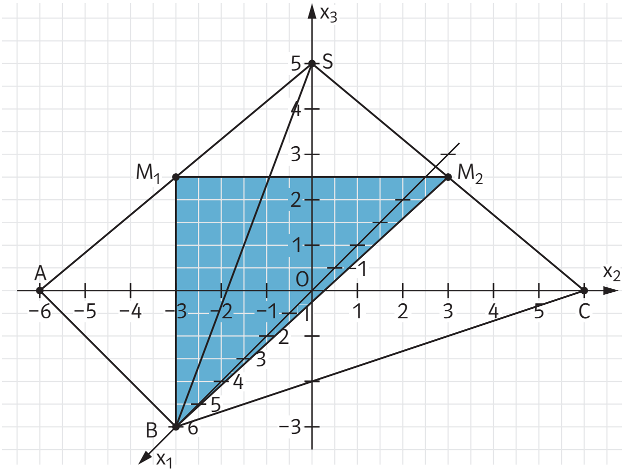
g	25	26	27
$1 - P(X \leqq g)$	0,0119	0,0062	0,0031

Somit gilt $g = 26$ bzw. $g + 1 = 27$.

Entscheidungsregel:
Wenn die Augenzahl 3 mindestens 27-mal fällt, wird die Nullhypothese H_0 abgelehnt, andernfalls wird sie nicht abgelehnt.

Aufgabe B 2.1

a) Darstellung der Pyramide und der Schnittfläche im Koordinatensystem:



Für den Mittelpunkt M_1 der Kante AS gilt:

$M_1\left(\frac{0+0}{2}\,\middle|\,\frac{-6+0}{2}\,\middle|\,\frac{0+5}{2}\right) = M_1(0\,|-3\,|\,2{,}5)$

Für den Mittelpunkt M_2 der Kante CS gilt:

$M_2\left(\frac{0+0}{2}\,\middle|\,\frac{6+0}{2}\,\middle|\,\frac{0+5}{2}\right) = M_2(0\,|\,3\,|\,2{,}5)$

Berechnung des Umfangs der Schnittfläche:

$U = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| + \left|\overrightarrow{BM_1}\right| + \left|\overrightarrow{BM_2}\right|$

Es gilt: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2} = 6$

$\left|\overrightarrow{BM_1}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6\\-3\\2{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{51{,}25}$

$\left|\overrightarrow{BM_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6\\3\\2{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{51{,}25}$

Somit gilt für den Umfang: $U = 6 + 2\cdot\sqrt{51{,}25}$

Der Umfang der Schnittfläche beträgt ca. 20,32 Längeneinheiten.

Koordinatengleichung von E:
Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E erhält man z. B. mithilfe des Vektorprodukts.

$\vec{n^*} = \overrightarrow{BM_1} \times \overrightarrow{BM_2} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\2{,}5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-6\\3\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\0\\-36\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n} = \begin{pmatrix}5\\0\\12\end{pmatrix}$

Somit lautet eine Koordinatengleichung von E: $5x_1 + 12x_3 = d$
Führt man die Punktprobe für B durch, so erhält man $5\cdot6 + 12\cdot0 = d$, also $d = 30$.

Eine Koordinatengleichung von E lautet: $5x_1 + 12x_3 = 30$

F 105
F 111
F 101
F 102
F 109
F 125

b) Parametergleichung für die Kante BS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \; 0 \leqq r \leqq 1$

Somit hat der beliebige Punkt Q_r die Koordinaten $Q_r(6-6r\,|\,0\,|\,5r)$.

Wenn das Dreieck $M_1M_2Q_r$ bei Q_r einen rechten Winkel haben soll, muss die Bedingung $\overrightarrow{Q_rM_1} \cdot \overrightarrow{Q_rM_2} = 0$ erfüllt werden. Es gilt:

$$\overrightarrow{Q_rM_1} \cdot \overrightarrow{Q_rM_2} = \begin{pmatrix} -6+6r \\ -3 \\ 2{,}5-5r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6+6r \\ 3 \\ 2{,}5-5r \end{pmatrix}$$

$$= (-6+6r)\cdot(-6+6r) - 9 + (2{,}5-5r)\cdot(2{,}5-5r)$$

$$= (6r-6)^2 - 9 + (2{,}5-5r)^2$$

$$= 36r^2 - 72r + 36 - 9 + 6{,}25 - 25r + 25r^2$$

$$= 61r^2 - 97r + 33{,}25 = 0$$

$$r_{1/2} = \frac{97 \pm \sqrt{97^2 - 4\cdot 61\cdot 33{,}25}}{122} = \frac{97 \pm 36}{122}$$

Damit folgt: $r_1 = \frac{1}{2}$ und $r_2 = \frac{133}{122} \approx 1{,}09$

Da $r_2 > 1$ ist, ergibt nur r_1 den gesuchten Punkt auf der Kante BS.

Der Punkt $Q(3\,|\,0\,|\,2{,}5)$ bildet mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck.

F 108

Alternative:
Das Dreieck ABC hat wegen $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ bei B einen rechten Winkel. Führt man nun eine zentrische Streckung mit Streckzentrum S und dem Streckfaktor 0,5 aus, dann hat das Bilddreieck bei B' ebenfalls einen rechten Winkel. Bei dieser zentrischen Streckung ist M_1 das Bild von A und M_2 das Bild von C. Daher ist der gesuchte Punkt Q der Mittelpunkt M_3 der Strecke BS, also $Q\left(\frac{6+0}{2}\,\middle|\,\frac{0+0}{2}\,\middle|\,\frac{0+5}{2}\right)$.

c) Da der Punkt $Z(z_1\,|\,z_2\,|\,z_3)$ in der x_1x_3-Ebene liegt, gilt $z_2 = 0$.
Die Grundfläche ABC liegt auf der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0$.
Somit hat der Punkt Z von der Grundfläche ABC den Abstand $d = z_3$.

Die Seitenfläche ACS liegt auf der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 0$.
Somit hat der Punkt Z von der Seitenfläche ACS den Abstand $d = z_1$.

Folglich gilt: $Z(d\,|\,0\,|\,d)$

Hesse'sche Normalenform von E:

$$\frac{5x_1 + 12x_3 - 30}{\sqrt{5^2+12^2}} = 0 \;\text{ bzw. }\; \frac{5x_1 + 12x_3 - 30}{13} = 0$$

Für den Abstand d des Punktes Z von E gilt:

F 162
F 8

$$\frac{|5\cdot d + 12\cdot d - 30|}{13} = d \;\text{ bzw. }\; \frac{|17\cdot d - 30|}{13} = d$$

$$|17d - 30| = 13d$$

$$\begin{array}{rclcrcl} 17d - 30 &=& 13d & \quad\text{oder}\quad & 17d - 30 &=& -13d \\ 4d &=& 30 & & 30d &=& 30 \\ d &=& 7{,}5 & & d &=& 1 \end{array}$$

Man erhält also: $d_1 = 1$ und $d_2 = 7{,}5$
Jeder Punkt im Innern der Pyramide hat eine x_3-Koordinate kleiner als 5.
Somit liefert nur $d_1 = 1$ den gesuchten Punkt.

Der Punkt $Z(1\,|\,0\,|\,1)$ ist der gesuchte Punkt.

Aufgabe B 2.2

Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind:

Es sei X die Anzahl der anwesenden Fortgeschrittenenpaare.
Es liegt eine $B_{4;0,75}$-Verteilung vor. F 231

$P(X=4) \approx 0{,}3164$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind, beträgt ca. 31,6 %.

Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens sechs Anfängerpaare und höchstens drei Fortgeschrittenenpaare anwesend sind:

Es sei Y die Anzahl der anwesenden Anfängerpaare.
Es liegt eine $B_{8;0,9}$-Verteilung vor.

$P(X \leqq 3) \cdot P(Y \geqq 6) = P(X \leqq 3) \cdot (1 - P(Y \leqq 5)) \approx 0{,}6576$ F 231

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 65,8 % sind an einem Abend mindestens sechs Anfängerpaare und höchstens drei Fortgeschrittenenpaare anwesend.

Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens elf Paare anwesend sind:

Wenn mindestens elf Paare anwesend sein sollen, kommen nur die folgenden Ereignisse in Betracht:
A: Es sind vier Fortgeschrittenenpaare und sieben Anfängerpaare anwesend.
B: Es sind drei Fortgeschrittenenpaare und acht Anfängerpaare anwesend.
C: Es sind vier Fortgeschrittenenpaare und acht Anfängerpaare anwesend.

Es gilt: $P(A) = P(X=4) \cdot P(Y=7) = 0{,}12106\ldots$ F 211
$P(B) = P(X=3) \cdot P(Y=8) = 0{,}18160\ldots$ F 231
$P(C) = P(X=4) \cdot P(Y=8) = 0{,}13620\ldots$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt: F 211

$P(A) + P(B) + P(C) \approx 0{,}4389$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 43,9 % sind an einem Abend mindestens elf Paare anwesend.

2